Banque MP Inter-ENS - Session 2022

Rapport sur l'oral de Mathématiques commun ULSR

Ecoles concernées : ENS Ulm, ENS de Lyon, ENS Paris-Saclay, ENS Rennes

Le jury était composé de Olivier Fouquet, Christine Huyghe, Joseph Lehec, et Benjamin Melinand. L'épreuve est commune à plusieurs concours, le poids relatif de l'épreuve pour chacun de ces concours est indiqué dans le tableau suivant, il est exprimé en pourcentage du total des épreuves (écrites et orales) arrondi à l'entier le plus proche.

Ulm MP et MPI	Lyon MP et MI	Paris-Saclay MP et MPI	Rennes MP et MPI	Ulm Info	Lyon Info (M)	Paris-Saclay Info
14%	11%	15%	15%	13 %	11%	13%

Il y avait 483 admissibles et le jury a effectivement fait passer 448 candidates, divisées à parts à peu près égales entre les quatre examinateurs. Les notes s'étalent de 6 à 19, la moyenne s'établit à 12,57, la note médiane à 13 et l'écart-type à 2,4. Les notes sont donc typiquement plus resserrées que pour les épreuves écrites ce qui signifie que le *coefficient effectif* de l'épreuve est probablement un peu moins élevé que ce qui est indiqué dans le tableau précédent.

1 Déroulement des épreuves

Les mesures sanitaires anti-covid ont été respectées pendant toutes les épreuves. Les candidates étaient libres de porter un masque ou non.

Nouveauté cette année : le public était autorisé à assister aux oraux. Seul un nombre limité de personnes peuvent assister à une planche. Les téléphones portables doivent être rangés et bien entendu le public doit se borner à être un spectateur passif. Par ailleurs, pour des raisons de confidentialité, il a généralement été refusé que le public assiste à la première fois qu'un exercice est posé (sachant qu'un exercice est souvent donné deux fois de suite). Après quelques ajustements, la présence de public n'a absolument pas altéré le bon déroulement des oraux communs ULSR de cette année 2022.

Voici le déroulé typique d'une épreuve.

1. Chaque candidat était interrogé au tableau par un des examinateurs, sans temps de préparation. La durée officielle d'une interrogation étant de 45 minutes, le tiers-temps ouvrait le droit à un quart d'heure supplémentaire. À ce sujet, il est très important qu'une candidate ayant un tiers-temps le signale le plus tôt possible à l'organisation du concours ainsi qu'à l'examinatrice dès qu'elle entre dans la salle de l'oral.
2. Les énoncés étaient dictés aux candidates. Dans le cas d'un énoncé comptant plusieurs questions celles-ci étaient en général données une par une.

3. En début d'oral, après avoir dicté l'exercice, l'examinatrice laissait en général passer cinq à dix minutes sans intervenir, à moins d'être sollicité par le candidat.
4. Passé ce temps de réflexion libre, l'examinatrice commençait à interagir avec le candidat, typiquement en posant une question de cours en lien avec l'exercice. Dans la plupart des cas, la résolution des questions se fait ainsi dans le cadre d'un échange constructif entre candidate et examinateur.

On détaille un peu ci-dessous certains aspects du déroulement de l'oral.

Formulation de l'exercice. Il est attendu des candidats qu'ils retranscrivent les énoncés *in extenso* au tableau, en respectant les notations de l'examinateur. À cette étape, le candidat doit absolument intervenir pour lever toute ambiguïté dans une formulation. La durée d'une planche est trop courte pour gérer d'éventuels quiproquo.

Début de l'épreuve. La difficulté du début de l'épreuve est variable. Parfois les énoncés commencent par des questions faciles destinées à familiariser la candidate avec le contexte général de l'exercice et à favoriser l'assimilation du problème. Dans ce cas on attend de la candidate qu'elle repère que ce sont des questions faciles, et qu'elle ne traine pas trop à les résoudre.

Dans d'autres cas, la première question de l'énoncé est déjà difficile. On attend alors du candidat qu'il se familiarise avec l'énoncé, en comprenne les difficultés et commence à réfléchir à la manière de les surmonter. Il y a alors deux écueils à éviter: celui de vouloir aller trop vite et de se lancer au hasard dans des calculs sans avoir vraiment réfléchi au problème, et son contraire, qui consiste à rester les bras croisés en attendant que l'examinatrice donne une indication.

Corps de l'épreuve. Le dialogue est alors engagé. À ce niveau il est important que la candidate explique clairement quelles sont ses idées et sache aussi écouter les éventuelles indications de l'examinateur. La mise en œuvre technique est aussi très importante : avoir de bonnes idées ne suffit pas, encore faut-il savoir donner des solutions précises et rigoureuses. Il est aussi préférable d'écrire tous les détails d'une démonstration au tableau : en général l'examinateur ne se contentera pas d'un optimiste et superficiel « On voit bien que… » ni d'une esquisse orale des étapes de la démonstration.

Évaluation. La note n'est pas uniquement fonction du degré d'avancement de la solution à la fin de l'oral. Elle dépend des interactions entre candidat et examinatrice au cours de l'oral, ainsi que de la difficulté de l'exercice. Notons à ce sujet que la plupart des exercices ont été donnés huit fois (deux fois de suite avec quatre examinatrices en parallèle). Il est toujours préférable d'éviter les erreurs de raisonnement, mieux vaut prendre le temps de la réflexion plutôt que de parler trop vite, mais un oral est un tout et faire une erreur à un moment n'est pas nécessairement rédhibitoire, surtout si la candidate s'en rend compte d'elle-même. Les notes inférieures à 10 étaient en général réservées aux candidats pour lesquelles un réel problème avait été détecté, typiquement un résultat de cours important non su, ou bien des erreurs de raisonnement grossières.

2 Qualités attendues des candidats

- **Connaissance du cours.** Une parfaite connaissance du cours est la condition *sine qua non* du succès lors de l'épreuve et de la réussite au concours. Il tombe sous le sens que savoir son cours permet de résoudre les exercices. De plus, à l'oral, il est très facile à l'examinatrice de poser une question de cours, parfois pour simplement donner une indication, ou plus prosaïquement pour tester la candidate. Il est alors bien entendu rédhibitoire qu'un point important du cours lui ait échappé.
- **Attention au hors programme.** Rappelons d'abord une évidence, les exercices sont tous conçus pour être résolus dans le cadre du programme. Néanmoins le contenu du cours n'étant manifestement pas le même d'une classe ou d'un lycée à l'autre, des notions hors programme ont ainsi pu être traitées en cours dans certaines classes. Certaines de ces notions peuvent parfois faciliter la résolution d'un exercice, mais c'est un jeu un peu dangereux. Rappelons qu'un candidat souhaitant utiliser un résultat hors programme doit s'attendre à ce que l'examinateur lui demande de le démontrer. De plus, l'examinateur pourra être amené à vérifier que la notion est réellement maitrisée, et si ce n'est pas le cas, le candidat sera bien sûr sanctionné.
- On attend des candidates qu'elles démontrent des qualités de future chercheuse: savoir mener un dialogue scientifique constructif avec une scientifique, cerner les difficultés, faire progresser sa réflexion, résoudre le problème posé de façon rigoureuse.
- Travailler et surtout chercher par soi-même la solution des exercices durant les années de préparation au concours est primordial. Il n'est pas très utile de bachoter bêtement tous les exercices vus dans l'année. L'examinateur se rend vite compte qu'une solution a été apprise par cœur, surtout quand le candidat se met finalement à hésiter car il ne connaît plus la suite. Au contraire, on retiendra toujours beaucoup mieux un raisonnement qu'on a fait soi-même et qu'on saura reproduire dans un contexte voisin.
- Ce point a déjà été évoqué à la section précédente, mais on attend de la candidate une certaine autonomie et un certain dynamisme. Même si l'énoncé est difficile, il ne faut pas être passif mais proposer des pistes, réfléchir sur des exemples, cerner les difficultés. L'examinatrice sera toujours prête à suggérer des pistes et à engager la discussion mais attend de la candidate qu'elle réfléchisse et que cette réflexion débouche sur des suggestions pertinentes. Une possibilité de réflexion lorsqu'une question s'avère difficile (ce qui est fréquemment le cas) est d'essayer d'isoler un cas particulier accessible intéressant : que devient par exemple une question portant sur une matrice quelconque ou sur une fonction C^∞ dans le cas diagonal ou pour un polynôme? si une question porte sur tout $n \in \mathbb{N}$, est-elle déjà intéressante pour les petites valeurs de n?
- Il faut bien sûr présenter une solution qui soit parfaitement rigoureuse mais il ne faut pas non plus être paralysé par la peur de dire une bêtise. Un *calcul formel* ne sera pas sanctionné s'il est présenté comme tel et un excès de rigueur peut parfois être préjudiciable. Par exemple, cela fait mauvais effet de perdre dix minutes à essayer de montrer que les conditions d'une interversion série intégrale sont réunies sans avoir regardé si la dite interversion donnait quelque chose d'exploitable.
- L'échange avec le candidat doit être fluide et le candidat doit être capable de s'expliquer clairement, ce qui fut le cas la plupart du temps lors de cette session d'oraux. Il est important que le tableau soit bien lisible, ce qui fut aussi très majoritairement le cas.
- L'aisance technique des candidates est aussi évaluée, on attend d'elles qu'elles soient

capables de mener à bien un calcul un peu compliqué en temps raisonnable et sans faire des erreurs de signe à chaque ligne.

3 Quelques remarques spécifiques sur le programme

Le jury est globalement satisfait de la maîtrise du programme par les candidats, mais a pu constater des disparités assez nettes dans la connaissance des différentes parties du programme.

- Le programme d'algèbre linéaire est globalement bien maîtrisé, en particulier tout ce qui concerne la réduction des endomorphismes. Certains candidats ont néanmoins oublié que le lemme de décomposition des noyaux s'applique aussi sur un corps non algébriquement clos. Signalons aussi une maladresse assez fréquemment rencontrée, qui consiste à traîner des matrices de passage tout le long d'un exercice, plutôt que simplement se placer dans une base de vecteurs propres et de faire les calculs directement dans cette base. Le point de vue uniquement matriciel peut parfois obscurcir le problème.
- Le programme sur les espaces euclidiens et les matrices symétriques réelles pose parfois quelques problèmes. Par exemple, il n'était pas clair pour toutes les candidates qu'une matrice orthogonale préservait la norme euclidienne. Il faut aussi vraiment avoir compris pourquoi une matrice symétrique réelle est diagonalisable. Enfin, et cela rejoint la remarque précédente, il peut être utile de se placer dans une base orthonormale de vecteurs propres pour un produit scalaire, plutôt que de traîner une matrice de passage inutile. Bizarrement, certaines candidates n'étaient pas à l'aise avec la notation entre crochets d'un produit scalaire, préférant le noter matriciellement. Il est bien entendu nécessaire d'utiliser la notation la plus pertinente pour résoudre un problème.
- Le programme d'analyse, notamment les théorèmes de convergence classiques sont eux aussi plutôt bien maîtrisés, malgré quelques accidents surprenants, comme des candidats qui ne connaissent pas le théorème de convergence dominée, ou ses variantes, ou alors qui le maitrisent mal. Par exemple, on attend des candidats d'avoir compris que pour obtenir la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre réel il suffit d'avoir une hypothèse de domination uniforme sur tout compact, et pas forcément uniforme sur toute la droite réelle.
  La définition de rayon de convergence d'une série entière n'est pas toujours connue.
- Le jury a constaté que la théorie des probabilités était beaucoup moins bien maitrisée que les autres parties du programme. Par exemple, une part non négligeable des candidates a du mal à énoncer l'inégalité de Markov, notamment en hésitant sur le sens de l'inégalité.
- Dans une moindre mesure le calcul différentiel fait aussi figure de parent pauvre du programme. Par exemple la question de savoir quel est le gradient du carré de la norme euclidienne a été étonnamment discriminante, et certains candidats croient qu'une norme sur un espace vectoriel de dimension finie est différentiable. La notion de vecteurs tangents à une partie de $\mathbb{R}^n$ n'est pas non plus toujours bien assimilée. La dérivée de la norme d'un vecteur n'est parfois pas maîtrisée.
- Le jury s'étonne un peu de devoir faire cette remarque, mais il rappelle que la maîtrise parfaite de la résolution de l'équation du second degré et des relations entre coefficients et racines (par exemple la résolution du système d'équations $a + b = s, ab = p$) est évidemment attendue. Étonnamment, ce point a pausé des difficultés à une proportion significative des candidats qui y ont été confronté.

4 Exemples d'exercices

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.

- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $C(A)$ la matrice des cofacteurs de A. Soient u,v deux vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$, P,Q les matrices (dans la base canonique) des projecteurs orthogonaux sur $u^\perp$ et $v^\perp$. Montrer que $C(P)C(Q)C(P) = \langle u,v\rangle^2 C(P)$.
- Soient P un projecteur orthogonal de rang $n-1$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et D le déterminant de la restriction de PAP à $Im(P)$, montrer que $D = Tr(C(PAP))$.
- Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, $\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}$ des nombres réels positifs vérifiant la condition : $\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \beta_{n-1} \geq \alpha_n \geq 0$ et A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\alpha_1,\ldots\alpha_n$. Montrer qu'il existe une matrice P de projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$, telle que les valeurs propres de PAP sont $0,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}$.

Indications

Pour la première question, il est utile de remarquer que $C(AB) = C(A)C(B)$. Pour la dernière question on peut chercher le projecteur orthonormal P sous la forme d'un projecteur orthogonal sur $z^\perp$ avec $||z|| = 1$.

Remarque : il n'était pas vraiment attendu que les candidats traitent la question 3.

Exercice 2. Soit $F(x) = 5x(1-x)$ et $I = [0,1]$. On pose $F^n = F \circ \ldots \circ F$.

1- Montrer que F^n a au moins 2^n points fixes.

2- Soit $A_n = \{x \in I \,|F^n(x) \in I \text{ et } F^{n+1}(x) \notin I\}$, $\Lambda = I \backslash \bigcup_n A_n$, montrer que Λ est un fermé non vide stable par F ne contenant pas d'intervalle ouvert.

3- Pour $x \in I$, on note $\Omega(x) = \{F^n(x), n \in \mathbb{N}\}$. Soit $x \in I$, tel que $\Omega(x)$ est borné, montrer que $\Omega(x) \subset \Lambda$.

Indications éventuellement données aux candidats: pour la question 1, restreindre l'ensemble dans lequel F^n peut avoir des points fixes. Pour la question 2, il est utile d'étudier B_n le complémentaire de A_n dans I.

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul. On construit une permutation aléatoire σ de $\{1,\ldots,n\}$ de la manière suivante. On choisit d'abord $\sigma(1)$ uniformément au hasard. Si $\sigma(1) \neq 1$ on choisit ensuite $\sigma^2(1)$ uniformément au hasard parmi les entiers restant et ainsi de suite jusqu'à boucler le cycle de 1. Ensuite, on choisit le plus petit élément i ne faisant pas partie du cycle de 1 et construit son cycle de la même manière, et ainsi de suite, jusqu'à avoir épuisé tous les entiers de 1 à n.

1. Montrer qu'on construit ainsi une permutation σ qui est uniforme sur l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,n\}$.
2. En déduire que le nombre de cycle d'une permutation aléatoire peut s'écrire
$$X_1 + \ldots + X_n$$
où les X_i sont des variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre i/n pour tout i.
3. Déterminer le comportement asymptotique (quand n tend vers l'infini) de ce nombre de cycles.

Exercice 4.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$. Montrer que
$$c \cdot \frac{\mathbb{E}X}{\log(2/\mathbb{E}X)} \leq \sup_{t \geq 0}\{t \cdot \mathbb{P}(X \geq t)\},$$
pour une certaine constante $c > 0$.
2. Montrer que cette inégalité est optimale au sens où il existe une suite (X_n) de variables aléatoires comprises entre 0 et 1 telle que $\mathbb{E}X_n \to 0$ et
$$\sup_{t \geq 0}\{t \cdot \mathbb{P}(X_n \geq t)\} \leq C \cdot \frac{\mathbb{E}X_n}{\log(2/\mathbb{E}X_n)}.$$
pour une certaine constante C ne dépendant pas de n.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On définit la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (M_n(\mathbb{C}))^{\mathbb{N}}$ par récurrence : pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$X_{k+1} = 2X_k - (X_k)^2$$
et $X_0 = A$. On introduit les ensembles
$$\Gamma = \{X_0 \text{ , la suite } (X_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge}\} \text{ , } \omega = \{\lim_{k \to +\infty} X_k \text{ , pour } X_0 \in \Gamma\},$$
et si $B \in \omega$,
$$\Gamma_B = \{X_0 \text{ , la suite } (X_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } B\}.$$
Déterminer les ensembles ω et Γ_B pour tout $B \in \omega$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Caractériser tous les morphismes d'algèbre $\Phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\Phi(f)$ est trigonalisable.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité que deux éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pris au hasard de façon indépendante et équiprobable ait un produit nul.

Exercice 8. Soit $n \geq m > 0$ des entiers. Quelle probabilité est la plus grande, obtenir un injection quand on tire au hasard et de manière équiprobable une application de $\{0, \cdots, m-1\}$ vers $\{0, \cdots, n-1\}$ ou obtenir une surjection quand on tire au hasard une application de $\{0, \cdots, n-1\}$ vers $\{0, \cdots, m-1\}$?

Exercice 9. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit G un sous-groupe fini de $O_d(\mathbb{R})$. Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ l'ensemble
$$\{g(e_1) | g \in G\}.$$
On dit que $(x,y) \in X^2$ sont adjacents si $||x - y|| = \min_z\{||x - z|| \mid x \neq z\}$ pour $|| \cdot ||$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$.

Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^X)^{\mathbb{N}}$ la suite définie de la manière suivante.

1. $r_0 = (r_x)_{x \in X} \in \mathbb{R}^X$.
2. Si $n \geq 0$, $r_{n+1,x}$ est la moyenne des $r_{n,y}$ pour les y adjacents à x

Discuter de $\lim r_n$.

Exercice 10. On dit qu'un idéal $I \subsetneq A$ d'un anneau commutatif A est premier (resp. maximal) si le complémentaire $A - I$ de I dans A est stable par multiplication (resp. si le seul idéal contenant strictement I est A lui-même).

Soit p un nombre premier. Soit $\zeta_p \in \mathbb{C}$ une racine primitive de l'unité d'ordre p. Montrer que les idéaux premiers non-nuls de l'anneau
$$\mathbb{Z}[\zeta_p] = \{P(\zeta_p) | P \in \mathbb{Z}[X]\}$$
sont ses idéaux maximaux.