

Banque MP inter-ENS – Session 2022
Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques (Math C)

• **Écoles partageant cette épreuve :**

ENS Lyon, Paris-Saclay, Rennes et Ulm

• **Coefficients (en % du total des points de chaque concours) :**

- Lyon : MP & MPI 10,8 % ; Info 11,3 %
- Paris-Saclay : MP & MPI 9,6 % ; Info 13,2 %
- Rennes : MP & MPI 9,6 % ; Info 11,4 %
- Ulm : MP 3,7 % ; Info 13,3 %

• **Membres du jury :**

François BOLLEY, Pascal BOYER, Alain DURMUS, Vincent PERROLLAZ, Thomas SIMON, Carl TILPLER (correcteurs) et Patrick BERNARD (concepteur)

Présentation générale

Le sujet Math C 2022 portait sur le problème de linéarisation des séries entières complexes. Le candidat était guidé au fil des différentes parties du sujet vers la résolution de ce problème. Il s'agissait tout d'abord, après avoir établi quelques résultats préliminaires (partie A), d'étudier la composition des séries (partie B), puis la notion de série réciproque (partie D), avant de s'attaquer enfin à la linéarisation (parties E, F et G). Un résultat technique utile était également obtenu en partie C.

L'épreuve a permis de tester l'aisance des candidats à manipuler les techniques et les outils classiques d'analyse au programme des classes préparatoires, avec un accent particulier sur les notions liées aux séries entières complexes ou à termes positifs : rayon de convergence, comparaisons, unicité du développement, interversion de limites, etc. Il était important de distinguer les questions ayant trait aux séries formelles de celles faisant intervenir des passages à la limite, et dans celles-ci de mettre en avant avec précision les hypothèses assurant la convergence.

Les notes se sont étalées de 0/20 à 19,7/20, avec une moyenne de 9,79/20 et un écart-type de 3,93. Le jury souhaite rappeler qu'il attend des candidats clarté, précision et rigueur, et ceci même sur les questions les plus élémentaires. Il n'a pas hésité à sanctionner fortement les réponses manquant de justifications convaincantes. La présentation entre aussi pour une part importante dans l'appréciation d'une copie, et l'utilisation d'un brouillon est fortement recommandée. Enfin, il est rappelé qu'il convient de bien dégager les hypothèses nécessaires pour invoquer tout résultat au programme permettant de répondre à une question du sujet.

De l'avis du jury, le problème proposé était relativement long et sa difficulté principale provenait de son thème assez spécifique. Les candidats plus à l'aise avec les séries entières se sont bien démarqués, bien qu'aucune copie ne soit parvenue à résoudre entièrement le sujet. Une poignée de candidats d'excellent niveau sont parvenus à traiter en quasi totalité les parties A à F. La partie G n'a été abordée que superficiellement.

Le jury a constaté que de nombreux candidats ne semblent pas à l'aise avec des raisonnements élémentaires sur les séries. En particulier, les justifications de convergence étaient trop souvent absentes

ou incorrectes. Le nombre moyen de questions abordées étant assez faible, le barème a été adapté en conséquence. Répondre correctement aux questions (1) à (7) permettait d'atteindre une note supérieure à la moyenne. Traiter parfaitement les parties A à C permettait d'obtenir une bonne note. Terminer avec succès les parties D et E assurait alors d'avoir une des meilleures notes. Le jury souhaite rappeler aux candidats qu'ils ne peuvent pas espérer obtenir une bonne note s'ils se cantonnent aux questions les plus simples de chaque partie. Ceux qui ont pris ce parti n'ont guère été récompensés.

Partie A

La première partie du sujet rassemblait des préliminaires sur les séries entières. Elle permettait aux candidats d'une part de se familiariser avec les notations du sujet et d'autre part de revenir sur quelques résultats basiques mais essentiels sur le rayon de convergence. Elle a été abordée par tous les candidats, mais de façon très inégale. Le jury a ici été très pointilleux sur l'argumentation et les raisonnements des candidats, et il a lourdement sanctionné les réponses imprécises ou incomplètes.

La question (1) a été en général bien traitée. Le jury attendait néanmoins une justification de l'exemple demandé.

Dans la question (2), le jury a constaté qu'un trop grand nombre de candidats ne maîtrisait pas la définition du rayon de convergence d'une série entière. La mauvaise utilisation d'inégalités larges à la place d'inégalités strictes, et inversement, a bien entendu été sanctionnée.

Dans la question (3), il fallait penser à la série géométrique. Les justifications de la première implication demandée étaient trop souvent incorrectes. Par ailleurs, comme pour la question (2), de nombreux candidats n'ont pas fait les distinctions entre inégalités larges et strictes.

Dans la question (4) il s'agissait d'utiliser avec précision le théorème du cours sur le produit de Cauchy.

Partie B

La deuxième partie du sujet portait sur la définition et l'étude de la composition de séries. Certaines questions portaient sur les séries formelles, tandis que d'autres nécessitaient une analyse de la convergence des séries étudiées. Il était crucial de percevoir cette différence pour bien réussir cette partie.

La question (5) faisait appel à diverses récurrences. Elles ont été bien posées dans l'ensemble, mais la justification de l'annulation des coefficients de bas degré a donné lieu à quelques arrangements avec la rigueur.

La question (6) nécessitait beaucoup de soin pour être réussie et très peu de copies ont su la traiter correctement. Pour le deuxième point, on pouvait utiliser la continuité de la somme d'une série entière et un théorème de sommabilité pour des séries à termes positifs.

La question (7) était simple et reposait sur des arguments déjà utilisés. Elle a été globalement bien traitée.

Les questions (8) et (9) reposaient sur des arguments de sommabilité, qui permettaient d'invertir l'ordre de sommation ou de sommer par paquets. Ces questions ont été discriminantes.

La question (10) a été très rarement bien traitée. L'erreur la plus fréquemment rencontrée consistait à croire qu'il suffisait d'invoquer la question précédente pour conclure, parfois même sans justification

sur les rayons de convergence. Il s'agissait ici d'un résultat sur les séries formelles.

Partie C

La troisième partie établissait un résultat technique qui permettait de démontrer la stricte positivité d'un rayon de convergence.

Dans la question (11), après raisonnement par analyse-synthèse et résolution d'un trinôme, on pouvait exprimer h à l'aide de fonctions usuelles et utiliser le résultat de composition de la question 9. Le jury a sanctionné les fréquents manques de précision dans les diverses étapes du raisonnement.

Dans la question (12), le raisonnement par récurrence n'a pas toujours été mené proprement, et de nombreux candidats ont oublié de conclure.

Partie D

La quatrième partie du sujet portait sur l'existence et les propriétés de la série réciproque, par des arguments de séries formelles, de troncature, et de stricte positivité du rayon de convergence. Il s'agissait de bien les distinguer.

Les questions (13), (14) et (15) traitaient de l'inversion de séries formelles sans terme constant, les deux premières pouvant se résoudre en écrivant les équations sous forme de systèmes triangulaires.

Dans la question (16) il s'agissait d'utiliser successivement les résultats des questions (3), (7) et (12), en justifiant précisément leur utilisation, ce que de nombreux candidats ont omis de faire.

Dans la question (17) et (18), de trop nombreux candidats se sont lancés dans d'obscurs calculs de sommes qui n'ont malheureusement pas abouti et n'ont naturellement pas été récompensés.

Partie E

La cinquième partie du sujet proposait de montrer l'existence d'un changement de variable formel permettant de linéariser une série non dégénérée.

La plupart des candidats ayant abordé la question (19) ont bien observé la structure triangulaire du système associé, mais il fallait bien justifier la non nullité des coefficients diagonaux.

Étant donné le très grand nombre de candidats ayant voulu traiter la question (20) sans taire la question (19), cette question (20) rapportait peu de points.

Partie F

La sixième partie du sujet proposait de montrer que le changement de variable construit dans la partie E a un rayon de convergence strictement positif, dans un premier cas.

La question (21), ne traitant pas de série entière et étant d'énoncé élémentaire, a été abordée par la quasi totalité des candidats. De manière suprenante elle s'est avérée très discriminante, tant ont été nombreux les arguments flous, incomplets (notamment dans d'éventuelles distinctions de cas) ou menant à des ω dépendant de m .

Dans les questions (22) et (23), le jury a constaté et pénalisé un manque de précision dans l'application de résultats précédents, ce qui était déjà le cas dans la question (16).

Partie G

La septième partie du sujet proposait de montrer ce résultat dans un autre cas, plus délicat. Elle n'a été abordée que par un très faible nombre de candidats, qui pour la plupart se sont contentés d'en traiter les premières questions, plus simples et indépendantes du reste. Le barème a donc été adapté en conséquence.

★ ★
★