RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE D'INFORMATIQUE-MATHÉMATIQUES
FILIÈRE MP – CONCOURS INFO – SESSION 2022
ÉCOLES CONCERNÉES : ENS DE LYON, ENS DE PARIS, ENS DE PARIS SACLAY, ENS DE RENNES

Coefficients de l'épreuve (en pourcentage du total d'admission) :

LYON	**11,3%**
PARIS	**13,3%**
PARIS SACLAY	**13,2%**
RENNES	**8,6%**

MEMBRES DE JURY : D. POUS & N. FRANCIS & M. JEANMOUGIN

L'épreuve écrite d'informatique-mathématiques concerne les candidates et candidats aux quatre Écoles Normales Supérieures sur le concours INFO. Le nombre de candidats ayant composé était de 311 pour la session 2022, contre 316 en 2021. Les notes se sont échelonnées de 0 à 20 avec une moyenne de 8.3 et un écart-type de 4.2.

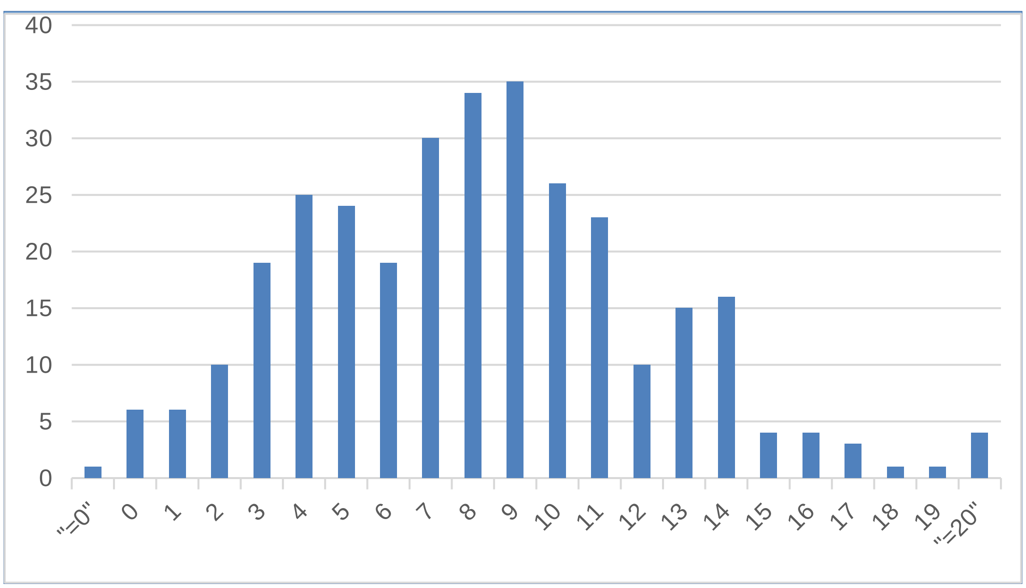

FIGURE 1 – Nombre de copies dans $[n;n+1[$.

1 L'épreuve

Afin de comparer la réussite à des questions indépendamment de leurs poids respectifs, les moyennes et écart-type par question sont données sur 1.

Le sujet 2022 portait sur des algorithmes permettant de tester l'équivalence de deux états dans un automate fini, et de minimiser de tels automates.

- — La partie 1 contenait des rappels sur les notions d'automates, mettait en place les notations, définissait l'algorithme étudié par la suite, et permettait de s'échauffer en manipulant ces notions.
- — La partie 2, très mathématique, s'intéressait à la théorie des points fixes de fonctions d'ensembles (Knaster-Tarski, itération de Kleene). Elle consistait à mettre en place des outils permettant par la suite de prouver la correction des algorithmes présentés.
- — La partie 3 constituait le coeur informatique du sujet : on commençait par y prouver la correction et la complexité de l'algorithme de la partie 1, puis on mettait en place une famille générique d'optimisations, via les outils mathématiques de la partie 2, et l'on définissait enfin deux exemples concrets d'optimisations, le second aboutissant à l'algorithme presque linéaire de Hopcroft et Karp
- — La partie 4 basculait sur le problème de la minimisation d'automates, et menait à un algorithme quadratique en s'appuyant sur l'itération de Kleene vue en partie 2.

2 Commentaires généraux

Le sujet de cette année, portant sur la preuve d'un algorithme permettant de tester l'équivalence de langages reconnus par deux automates donnés, demandait de par sa nature (de *preuve*) un effort rédactionnel tout particulier, et similaire en nature à des épreuves de mathématiques. Il introduisait de nombreuses notions sur les fonctions d'ensembles et de relations, avec des noms connus dans d'autres contextes par les candidats (continuité, croissance, etc.), qui ont pu donner une impression de familiarité à certains candidats qui sont passé à côté des difficultés du sujet, et se sont parfois contentés de preuves intuitives pour répondre à des questions là où une rédaction formelle était attendue.

Tout particulièrement pour ce sujet, de nombreuses copies ont survolé le fait que la notion de continuité/co-continuité implique la notion de suite ensembliste croissante/décroissante, ce qui les a lourdement pénalisé dans les preuves. Le jury a également été surpris par les copies proposant une preuve (fausse) de l'équivalence entre trois notions (croissante, continue, co-continue) alors même que le sujet continuait à utiliser ces notions dans la suite de manière différenciée, et les preuves faisant appel à cette équivalence dans la suite pour simplifier des questions n'ont évidemment pas reçu le moindre point.

Enfin, certains candidats se sont parfois limités à des preuves sur des ensembles finis, ce qui ne permet pas de démontrer un résultat pour une suite infinie. Parmi celles-ci, certains candidats ont tenté de généraliser rapidement à tout ensemble en employant le terme « par passage à la limite », avec un effet négatif fort sur l'impression laissée au correcteur par une telle tentative.

Le jury tient à rappeler en particulier que les premières parties d'un sujet, introduisant les notions, servent à la fois à mettre en confiance les candidates et candidats avec les notions du sujet, et à mettre en confiance le jury dans les capacités du candidat à démontrer par une rédaction formelle sa compréhension fine de ces notions, en utilisant avec rigueur les définitions formelles présentées dans le sujet et sans raccourcis.

Les questions démontrant une compréhension fine des notions et des enjeux du sujet étant, comme à l'accoutumée, plus valorisées que les questions d'application et d'exemple, les stratégies visant à éviter les questions difficiles du sujet n'ont pas été très rentables.

3 Commentaires détaillés

Ci-dessous nous donnons pour chaque question le nombre de points associés, puis :

— le nombre de copies ayant reçu des points pour cette question (c'est à dire le nombre de copies où la question a été traitée et non nulle) ;

— la moyenne **sur 1** de toutes les copies ayant traité la question ;

— l'écart-type **sur 1** de toutes les copies ayant traité la question.

Pour chaque partie, on donne le nombre total de points qui pouvaient être obtenus, puis la moyenne et l'écart type des points obtenus.

Partie 1 (1.6 pts | moy 1.3 stdev 0.3)

Pour cette partie d'échauffement, aucune justification n'était demandée. Il s'agissait simplement de vérifier la bonne compréhension des notions du sujet.

▷ **Question 1.1. [0.2 pt | 265 / 0.8 / 0.4]** L'énoncé demandait explicitement une description intuitive des langages. Les candidats ayant décrit les langages demandés en français ou sous la forme d'un ensemble mathématique ou d'une expression régulière simple ont marqué tous les points. Les candidats ayant donné une expression régulière difficile à vérifier (par exemple lorsqu'elle était issue de l'application d'un algorithme de traduction de l'automate, sans simplification) ont été légèrement pénalisés. Finalement, les candidats qui ont donné une réponse implicite (par exemple sous la forme d'un système d'équation reliant $L(1)$ et $L(2)$) n'ont marqué aucun point.

▷ **Question 1.2. [0.4 pt | 291 / 0.9 / 0.3]** Une description correcte, même compliquée, des langages demandés suffisait à marquer tous les points.

▷ **Question 1.3. [0.5 pt | 272 / 0.7 / 0.3]** La moitié des points était attribuée à la description des langages demandées, et l'autre moitié à donner les égalités avec les langages des états 3 à 7. La question ne présentait pas de difficulté particulière, mais une erreur fréquente a été d'oublier que seuls les états finals acceptent ε, et donc de conclure à tort que $L(0) = L(2)$.

▷ **Question 1.4. [0.2 pt | 277 / 0.9 / 0.3]** Une réponse cohérente avec les égalités données à la question précédente suffisait à marquer tous les points, même si ces dernières étaient erronées.

Il était attendu à cette question que le candidat décrive entièrement la relation d'équivalence, soit en donnant ses trois classes d'équivalence, soit en donnant explicitement toutes les paires en relation. Paraphraser les égalités trouvées à la question précédente ne suffisait pas, puisqu'elles établissaient uniquement la correspondance entre les états de $\{0,1,2\}$ d'une part et ceux de $\{3,4,5,6,7\}$ d'autre part, mais ne disaient rien sur les équivalences entre deux états de $\{3,4,5,6,7\}$.

▷ **Question 1.5. [0.2 pt | 288 / 0.8 / 0.3]** La question demandait simplement de dérouler l'algorithme avec la notation proposée par l'énoncé. Les candidats ayant choisi une autre notation n'ont pas été pénalisés, pourvu que leur choix contienne la même quantité d'information. Les notations ne permettant pas de suivre l'évolution de la file ou l'état final de l'algorithme ont par contre été sanctionnées.

L'erreur la plus fréquente sur cette question a été d'arrêter prématurément l'exécution de l'algorithme, en général, à la première paire répétée plutôt qu'à l'épuisement de la file.

Partie 2 (9.3 pts | moy 4.6 stdev 2.2)

Cette partie était plutôt scolaire et il était donc attendu que les candidats présentent des preuves claires et rigoureuses. Les arguments donnés devaient expliciter quand les hypothèses données par l'énoncé ou les résultats des autres questions étaient utilisées.

Le jury regrette qu'une petite partie des candidats aient mal compris l'énoncé et considéré des fonctions de E vers E plutôt que de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(E)$. Cette erreur invalide malheureusement la plupart des réponses données.

▷ **Question 2.1. [0.5 pt | 230 / 0.6 / 0.4]** Cette question n'a pas posé pas de difficulté de compréhension, mais illustre très bien le type d'imprécisions qui ont été pénalisées tout au long de cette partie.

Ici, la définition de continuité d'une fonction fait intervenir une suite *croissante* et *indexée sur* $\mathbb{N}$. Cependant, un grand nombre de candidats ont appliqué directement la définition de continuité pour affirmer que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, sans expliciter la suite utilisée, ni prouver sa croissance. Ces copies ont été très lourdement sanctionnées.

▷ **Question 2.2. [0.2 pt | 218 / 0.6 / 0.4]** Cette question était très similaire à la question précédente, et a mis en évidence les mêmes erreurs. De plus, la définition de co-continuité faisait cette fois intervenir une suite *décroissante*, et de nombreux candidats ont fait l'erreur de réutiliser la même suite que celle de la question précédente.

▷ **Question 2.3. [1 pt | 94 / 0.3 / 0.4]** La réponse aux deux questions était négative, pourvu que l'univers E considéré soit infini. Cette question s'est avérée très discriminante et a été généralement très mal traitée.

Un très grand nombre de copies tentent de prouver les propriétés demandées en considérant les préfixes finis des suites impliquées par la continuité et la co-continuité, puis invoquent un "passage à la limite" non justifié. Le raisonnement est incorrect et n'a rapporté aucun point.

Le jury a été bienveillant avec les candidats ayant fait un raisonnement correct dans le cas où E est fini. Bien que ne répondant pas à la question, ces candidats ont tout de même montré leur bonne maîtrise des notions utilisées, et ont marqué la moitié des points.

Finalement, le jury a accordé des points supplémentaires (hors barème) aux quelques excellentes copies qui ont prouvé que la propriété est vraie si et seulement si E est fini.

▷ **Question 2.4. [0.5 pt | 291 / 0.8 / 0.3]** Cette question a été généralement bien traitée. Le jury a particulièrement apprécié les quelques candidats qui ont remarqué que la question 2.4.(ii) ne fonctionne pas dans le cas pathologique où $E = \emptyset$.

▷ **Question 2.5. [0.5 pt | 226 / 0.7 / 0.4]** Cette question demandait encore une fois aux candidats de prouver rigoureusement le résultat demandé.

Ici, l'énoncé ne donnait aucune hypothèse sur la famille de post-points fixes considérés. Les candidats qui ont supposé la famille finie ou dénombrable afin de faire un raisonnement par récurrence ou d'itérer la définition de la croissance ont été très lourdement sanctionnés.

▷ **Question 2.6. [1 pt | 270 / 0.6 / 0.4]** Pour la question (i), il s'agissait de prouver que $f(\nu f) \subseteq f(f(\nu f))$ par croissance de f, pour en déduire que $f(\nu f)$ est un post-point fixe, et donc le résultat recherché. Cette question a généralement été bien traitée, mais les candidats qui n'ont pas clairement explicité l'utilisation de la croissance de f ont été pénalisés.

La question (ii) a été moins bien réussie. Le jury remarque chaque année la tendance des candidats à faire des raisonnements par l'absurde inutiles, où l'hypothèse contradictoire est utilisée uniquement au moment d'exhiber la contradiction, la conclusion attendue ayant été prouvée par un raisonnement direct n'en faisant pas usage. En général, ces raisonnements, bien qu'inutilement compliqués, ne sont pas pénalisés puisque logiquement corrects. Cependant, dans cette question, beaucoup de candidats n'ont pas réussi à nier correctement l'affirmation "νf est le plus grand point fixe", et on supposé à tort l'existence d'un autre point fixe contenant νf. Cette erreur rend le raisonnement logiquement incorrect et a donc invalidé la réponse donnée.

▷ **Question 2.7. [0.7 pt | 182 / 0.7 / 0.5]** La réponse à cette question suivait le même raisonnement que celle de la question précédente, en définissant μf comme l'*intersection* des *pré*-points fixes de f. Les candidats qui ont soit refait le raisonnement en entier, soit explicité clairement les points à changer dans leurs réponses aux questions précédentes, ont marqué tous les points.

▷ **Question 2.8. [1 pt | 262 / 0.7 / 0.3]** La question (i) ne posait pas de difficulté particulière et a été généralement bien traitée.

La question (ii) était plus technique et demandait de bien mentionner tous les arguments utilisés : décroissance de la suite, co-continuité de f et définition et propriétés de νf. Le jury attendait ici un raisonnement clair et rigoureux pour marquer la totalité des points.

Un très grand nombre de candidats sont passés, sans le justifier, d'une intersection pour $i \in \mathbb{N}^*$ à une intersection pour $i \in \mathbb{N}$. Le jury rappelle que ce type de flou (volontaire ou non) dans les copies ne passe pas inaperçu, et a au contraire pour effet d'éveiller la méfiance du correcteur sur l'ensemble de la copie.

▷ **Question 2.9. [1 pt | 274 / 0.5 / 0.3]** La question (i) ne posait pas de problème particulier.

Vue la question (i), la question (ii) consistait principalement à montrer que f^ω est saturante. Il s'agissait alors d'appliquer la continuité de $(f \cup id)^j$ à la suite des $(f \cup id)^i(X)$, et donc de montrer la croissance de cette dernière. Encore une fois, une preuve rigoureuse, mentionnant clairement toutes les hypothèses utilisées, était attendue.

Certains candidats ont manqué cette question (et les suivantes) en prouvant à tort que $f^\omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^i$. Le jury incite les futurs candidats à considérer avec attention leurs conclusions qui semblent simplifier excessivement le sujet. Il est très rare que les énoncés soient volontairement trompeurs ou inutilement compliqués.

▷ **Question 2.10. [0.7 pt | 148 / 0.5 / 0.4]** La question demandait de prouver d'une part que $f^\omega(X)$ est un pré-point fixe de f contenant X, et d'autre part qu'il s'agit du plus petit ensemble (au sens de l'inclusion) ayant cette propriété. Les deux moitiés de la question ne posaient pas de difficultés particulières, et avaient le même poids dans le barème final. L'erreur la plus fréquente a été d'omettre l'une des deux parties de la question.

▷ **Question 2.11. [0.5 pt | 99 / 0.6 / 0.4]** Même remarque que pour la question précédente : il était nécessaire de rappeler pourquoi f^ω était bien une clôture contenant f, et donc d'assembler correctement les résultats des questions précédentes.

L'autre moitié de la question demandait d'utiliser explicitement et correctement les propriétés (extensivité et saturation) d'une clôture quelconque contenant f.

▷ **Question 2.12. [0.2 pt | 279 / 1 / 0.3]** Cette question de vocabulaire a été réussie par la vaste majorité des candidats et ne valait que peu de points.

▷ **Question 2.13. [0.5 pt | 238 / 0.8 / 0.4]** Il s'agissait dans cette question de remarquer que l'union des fonctions se traduisait en une conjonction (et pas une disjonction !) des propriétés. Par exemple, un pré-point fixe de $r \cup t$ est une relation réflexive *et* transitive.

Le vocabulaire précis pour designer les combinaisons des propriétés des relations (préordre pour $r \cup t$ et relation d'équivalence pour $r \cup s \cup t$) n'était pas exigé.

▷ **Question 2.14. [1 pt | 189 / 0.6 / 0.4]** La continuité des fonctions r et s ne posait pas de difficulté. La plupart des points de la question portaient sur la continuité de t, qui a malheureusement été assez mal traitée. Il était crucial ici de se rappeler que la définition de continuité fait intervenir une suite *croissante*, ce qui permettait de synchroniser correctement deux couples appartenant à l'union des termes de la suite en montrant leur appartenance au terme de plus grand indice.

Partie 3 (17.2 pts | moy 2.5 stdev 2.7)

La moitié seulement des candidats s'est attaquée à la partie 3, et la plupart ont terminé l'épreuve dans le premier tiers de cette partie.

▷ **Question 3.1. [0.2 pt | 212 / 0.7 / 0.4]** Cette question faisait écho à la question 1.5, puisque l'algorithme qui y était exécuté calculait les réponses. Elle permettait ainsi de donner des intuitions pour la correction de l'algorithme. La question a été bien traitée, mais trop de candidats ont oublié de justifier leurs réponses : à ce stade l'algorithme n'est pas encore prouvé, et on ne peut pas s'appuyer aveuglément sur la question 1.5.

▷ **Question 3.2. [0.2 pt | 208 / 0.8 / 0.4]** Question sans difficulté, bien traitée. Attention toutefois : les candidats se contentant de recopier la définition de croissance de p n'ont obtenu aucun point.

▷ **Question 3.3.i. [0.5 pt | 160 / 0.6 / 0.5]** La question 3.3 permettait de relier les théorèmes de point fixes de la partie 2 au problème de l'équivalence de langages. Le point (i) a posé quelques problèmes de rédaction : les deux équivalences données juste avant la question 1.1 permettaient de répondre de façon compacte, mais trop peu les ont utilisé.

▷ **Question 3.3.ii. [1 pt | 101 / 0.5 / 0.4]** Le point (ii) nécessitait une récurrence sur les mots (ou leur longueur). Nous avons été particulièrement exigeants sur la formulation de cette récurrence : soit l'on fixait $(x,y) \in R$ et l'on montrait que pour tout mot w, $(\delta^*(x,w), \delta^*(y,w)) \in R$; soit l'on montrait que pour tout mot w, pour tous états $(x,y) \in R$, $w \in L(x)$ ssi $w \in L(y)$. Dans le premier cas on ne peut pas se contenter de montrer $o(\delta^*(x,w)) = o(\delta^*(y,w))$; dans le second cas on ne peut pas fixer x et y en amont de la récurrence.

▷ **Question 3.3.iii. [0.2 pt | 164 / 0.8 / 0.5]** Il suffisait d'assembler les deux points précédents pour conclure, ce qui a été bien fait dans l'ensemble.

▷ **Question 3.4. [0.2 pt | 203 / 0.9 / 0.4]** Les questions 3.4 à 3.7 permettaient d'établir la correction de l'algorithme, dans les cas où il termine. La première question portait sur la préservation d'un invariant très intuitif. Nous avons accepté les réponses qui explicitaient cette intuition, même informellement.

▷ **Question 3.5. [1 pt | 119 / 0.4 / 0.4]** Le deuxième invariant nécessitait plus de soin et nous avons été plus exigeants sur la rédaction. Il fallait notamment démontrer que l'invariant était satisfait pour la paire en cours de traitement (insérée dans R), mais aussi que les paires précédentes continuaient de satisfaire l'invariant. Il fallait pour ce dernier point invoquer la croissance de la fonction p, et la croissance de la suite des valeurs de $R \cup F$. Peu de candidats on obtenu tous les points.

▷ **Question 3.6. [0.5 pt | 132 / 0.5 / 0.4]** Cette question facile permettait de conclure lorsque l'algorithme renvoie vrai, en combinant les deux invariants précédents, le fait que $F = \emptyset$ en sortie de boucle, et la question 3.3(ii). Si les candidats ayant traité la question semblaient avoir compris, trop peu ont bien détaillé l'enchaînement des propriétés à utiliser.

▷ **Question 3.7. [2 pt | 36 / 0.4 / 0.3]** Cette question visait à conclure lorsque l'algorithme renvoie faux. Elle a été très peu traitée comparativement à la partie 3 dans son ensemble. Sa formulation un peu plus ouverte ("donner un troisième invariant") a sans doute rebuté un certain nombre de candidats, ce que le jury déplore.

Nous avons favorisé ceux qui ont fait l'effort, en lui donnant du poids dans le barème global, et en donnant trois-quart des points lorsqu'un invariant permettant de conclure était donné, même sans justification.

▷ **Question 3.8. [0.5 pt | 129 / 0.5 / 0.4]** Il s'agissait ici d'obtenir la terminaison de l'algorithme. La plupart des candidats ayant traité la question ont trouvé un quantité répondant à la question, mais peu ont réussi à bien en déduire la terminaison de l'algorithme : il fallait remarquer que la quantité donnée restait inchangée lors des itérations triviales, et que la liste F décroît strictement à chaque itération triviale, ce qui fait qu'il ne peut y avoir une séquence infinie d'itérations triviales. Un seul candidat a donné une quantité décroissant strictement à toute itération, triviale ou non.

▷ **Question 3.9. [0.5 pt | 104 / 0.5 / 0.4]** Cette question établissait la complexité de l'algorithme. La complexité étant annoncée dans la question, nous avons été attentifs à la justification : trop de candidats semblaient bluffer en partant de la réponse, et ne justifiaient pas leur raisonnement.

▷ **Question 3.10. [0.2 pt | 119 / 0.6 / 0.4]** Presque tous les candidats ayant traité cette question ont su relier pile avec parcours en profondeur, et file avec parcours en largeur. Peu sont ceux qui ont compris que cela n'influençait pas sur la complexité dans le cas où l'algorithme renvoie vrai.

▷ **Question 3.11. [0.2 pt | 110 / 0.9 / 0.5]** Question triviale permettant de préparer la suivante. Presque toujours bien traitée.

▷ **Question 3.12. [0.5 pt | 67 / 0.6 / 0.4]** Il suffisait de généraliser au cas de deux cycles, de longueurs premières entre elles. Ceux ayant traité la question l'ont bien compris, mais certains ont oublié de justifier le nombre d'itérations ainsi obtenu ou la conséquence asymptotique.

▷ **Question 3.13. [1.5 pt | 49 / 0.5 / 0.3]** À partir de cette question, il s'agissait d'établir un cadre formel (3.13-3.19) pour proposer des optimisations (3.20-3.23). Il s'agissait de la partie la plus créative du sujet ; peu de candidats ont abordé ces questions.

Pour la question 3.13, nous avons donné la moitié des points dès qu'un invariant correct et accompagné d'hypothèses suffisantes sur g était donné. L'autre moitié des points pour la justification. Cette question donnant une idée relativement bonne de la compréhension globale du sujet, nous lui avons donné un poids important dans le barème.

▷ **Question 3.14. [0.5 pt | 24 / 0.4 / 0.3]** Contrepartie de la question précédente : pour garantir la correction dans le cas où l'algorithme renvoie faux. Question facile mais trop peu traitée.

▷ **Question 3.15. [0.5 pt | 65 / 0.6 / 0.4]** On revenait ici compléter pendant quatre questions le cadre mathématique abstrait de la section 2. Les questions n'étaient pas très difficiles, mais il fallait soigner la rédaction.

Pour la question 3.15, il fallait bien expliciter l'usage de la croissance de la fonction externe.

▷ **Question 3.16. [0.5 pt | 40 / 0.5 / 0.3]** Il fallait ici aussi mentionner au bon endroit l'usage de la croissance de f.

▷ **Question 3.17. [0.2 pt | 48 / 0.8 / 0.4]** Question d'assemblage : il suffisait bien mentionner les différents résultats utilisés pour conclure.

▷ **Question 3.18. [1.5 pt | 39 / 0.7 / 0.4]** Question très légèrement plus difficile, relativement bien traitée par les candidats s'y étant attaqués.

▷ **Question 3.19. [1 pt | 17 / 0.5 / 0.3]** Question d'assemblage à nouveau. On peut noter à ce stade un certain manque de rigueur, possiblement lié à la fatigue en fin de sujet.

▷ **Question 3.20. [0.2 pt | 19 / 0.4 / 0.3]** Question de déroulage triviale, la traiter seule n'avait pas grand intérêt.

▷ **Question 3.21. [1 pt | 14 / 0.4 / 0.2]** Cette question amenait à une première optimisation, facile. Les quelques-uns à avoir traité la question l'ont bien vue, mais peu ont réussi à la formuler et à la justifier via le cadre précédemment mis en place (r^ω est une clôture compatible avec p).

▷ **Question 3.22. [1 pt | 6 / 0.2 / 0.1]** Cette question menait à l'algorithme de Hopcroft et Karp. Une poignée de candidats l'a traitée, à nouveau sans réussir à exploiter le cadre mis en place ($(r \cup s \cup t)^\omega$ est une clôture compatible avec p).

▷ **Question 3.23. [2 pt | 2 / 0.3 / 0.1]** Il fallait ici penser à compter le nombre de classes d'équivalences, qui diminue de 1 à chaque itération non-triviale.

Partie 4 (5.9 pts | moy 0.1 stdev 0.3)

La partie 4 a été extrêmement peu traitée, à l'exception de la première question, triviale mais n'apportant quasiment aucun point. Quelques-unes des copies ayant atteint cette partie l'ont fait au détriment de réponses rigoureuses ou du traitement des questions complexes des parties précédentes, ce qui ne s'est pas avéré payant.

▷ **Question 4.1. [0.1 pt | 20 / 0.9 / 0.4]** Cette question de transition en application directe de la question précédente n'a posé aucun souci particulier.

▷ **Question 4.2. [0.5 pt | 13 / 0.5 / 0.3]** Les candidats remarquant qu'il suffit de montrer que p est co-continue ont obtenu des points, même s'ils n'arrivaient pas à le prouver.

▷ **Question 4.3. [0.5 pt | 13 / 0.7 / 0.3]** Une récurrence justifiée convient, et un candidat a également proposé de prouver la compatibilité de p avec r, s, et t.

▷ **Question 4.4. [1.5 pt | 4 / 0.2 / 0.1]** On attend ici un argument sur les classes d'équivalence de $p^i(X,X)$, que peu de candidats ont traité.

▷ **Question 4.5. [0.4 pt | 5 / 0.5 / 0.2]** Question d'application sur un exemple donné, sans difficulté spécifique hors de la compréhension des notions introduites précédemment.

▷ **Question 4.6. [0.5 pt | 3 / 0.2 / 0.1]**

▷ **Question 4.7. [2 pt | 1 / 0.3 / 0]** Les questions 4.4, 4.6 et 4.7 ont été traitées par 2 à 5 candidats, très probablement tout à la fin du temps, ce qui se ressent dans la rédaction. Si le jury a accordé une partie des points aux raisonnements *corrects*, il a également pénalisé l'oubli d'hypothèses nécessaires ou d'étapes de raisonnement, ce qui explique que peu de points ont été distribués aux candidats ayant tenté ces questions.

▷ **Question 4.8. [0.2 pt | 0 / 0 / 0]**

▷ **Question 4.9. [0.2 pt | 0 / 0 / 0]** Ces questions de conclusion n'ont été traitées par aucun candidat.