Problème d'Algèbre

Notations

$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes,
$\mathrm{D}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ désigne le sous-ensemble des matrices diagonales,
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ désigne le groupe des matrices inversibles,
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ désigne le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices de déterminant 1,
I_n désigne la matrice identité de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$,
$|X|$ désigne le cardinal d'un ensemble X.

1. Sous-groupes abéliens finis de $SL_n(\mathbb{C})$

1. Soit $x \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ telle que $x^N = \mathrm{I}_n$ pour un certain entier N strictement positif. Montrez que x est diagonalisable.
2. Soit $X \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ un sous-ensemble de matrices diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrez qu'il existe $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $aXa^{-1} \subset \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$.
3. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{D}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ les coefficients d'une matrice a. On définit un ensemble de nombres complexes :
$$\Lambda = \{g_{1,1} \ : \ g \in G\} \ \subset \mathbb{C} \ .$$
   (a) Montrez que les sous-groupes finis du groupe multiplicatif $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ sont cycliques. Déduisez que Λ est un groupe cyclique.
   (b) Soit λ un générateur de Λ et soit $a \in G$ tel que $a_{1,1} = \lambda$. On note G_1 le sous-groupe de G engendré par a. On note également G' le sous-groupe de G formé des matrices g telles que $g_{1,1} = 1$.
   Montrez que le groupe G est isomorphe au produit $G_1 \times G'$.
4. Soit G un sous-groupe abélien fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Montrez qu'il existe un entier $k \leq n-1$ et k groupes cycliques C_i, tels que G est isomorphe au produit $C_1 \times \cdots \times C_k$.

2. Sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

On identife les endomorphismes de $\mathbb{C}^2$ avec leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note $\mathbb{P}^1$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension un de $\mathbb{C}^2$:
$$\mathbb{P}^1 = \{\ell \subset \mathbb{C}^2 \ : \ \dim \ell = 1\} \ .$$
Si $a \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on note ψ_a l'application :
$$\begin{array}{rccc} \psi_a : & \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^1 \\ & \ell & \mapsto & a(\ell) = \{a(v) \ : \ v \in \ell\} \end{array}$$

Enfin, on note $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ qui sont de la forme $f = \psi_a$ pour un certain $a \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

1. Montrez que $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ est un groupe (pour la composition des applications). Montrez que l'application $\begin{array}{rccc} \psi : & \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \\ & a & \mapsto & \psi_a \end{array}$ est un morphisme de groupes surjectif et calculez son noyau.
2. Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ un élément d'ordre $n \geq 2$. Montrez que f a exactement 2 points fixes.
3. (**Sous-groupes finis de** $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ avec au moins deux éléments. On définit un ensemble :

$$X = \{\ell \in \mathbb{P}^1 \ : \ \exists g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\} \quad g(\ell) = \ell\} \ .$$

   (a) Montrez que X est un ensemble fini non vide, et que si $g \in G$ et $\ell \in X$, alors $g(\ell) \in X$.

   Le groupe G agit donc sur X par $g \cdot \ell := g(\ell)$. On note $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_N$ les orbites de cette action, et on pose $n_i = |G|/|\mathcal{O}_i|$.

   (b) Soit $E = \{(g, \ell) \in G \times X \ : \ g \cdot \ell = \ell\}$. Montrez l'égalité :

$$|X| + 2(|G| - 1) = |E| = N|G| \ . \qquad (E_1)$$

   Déduisez-en l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 - \frac{2}{|G|} \ . \qquad (E_2)$$

   (c) Montrez que N et les n_i sont des entiers supérieurs ou égaux à 2. Déduisez-en que $N = 2$ ou 3.

   (d) Supposons que $N = 2$. Montrez que G est cyclique.

   (e) Supposons que $N = 3$. Montrez que l'un des n_i est égal à 2, et déduisez que $|G|$ est pair.
4. (**Sous-groupes finis de** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Supposons que G n'est pas cyclique. Montrez que $|G|$ est un multiple de 4. *Indication : Montrez d'abord qu'un sous-groupe fini G de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est cyclique si et seulement si $\psi(G)$ est cyclique.*