Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que la suite de terme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ.

(1) On suppose que $\ell < 1$.

(1a) Montrer qu'il existe un entier n_0, une constante $C > 0$, et une constante $\rho \in [0, 1[$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \leq C\rho^n$.

(1b) En déduire que la suite (u_n) et la série $\sum u_n$ convergent.

(2) On suppose que $\ell > 1$. Montrer que la suite (u_n) et la série $\sum u_n$ divergent.

(3) Soit (v_n) une suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + v_n^2$ pour $n \geq 0$. Étudier la convergence de la suite (v_n) et de la série $\sum_n \frac{1}{v_n}$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère une matrice

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-n} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-n+1} \\ t_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ t_n & \dots & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{R})$$

pour certains réels t_{-n}, …, t_{-1}, t_0, t_1, …, t_n. On note $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$.

(1) Montrer que l'ensemble des matrices de cette forme est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{R})$. Quelle est sa dimension ?

(2) On introduit la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbf{R})$.

(2a) Soit $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Calculer Ux.

(2b) Montrer que U est inversible et calculer son inverse.

(2c) Montrer que $UT - TU = \begin{pmatrix} -f_n & -f_{n-1} & \cdots & -f_1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & f_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_n \end{pmatrix}$ où les f_i sont à déterminer.

On suppose dorénavant qu'il existe deux vecteurs x et y tels que $Tx = e_0$ et $Ty = (0, f_1, \dots, f_n)$.

(3) Montrer en utilisant la question précédente qu'il existe une matrice M telle que $UT = TM$.

(4) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$, $TM^k x = e_k$. En déduire que T est inversible et calculer son inverse.