

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calculer la probabilité que A soit inversible.
- (2) Calculer la loi du rang de A .
- (3) Calculer la probabilité que la matrice A soit diagonalisable.

Exercice 2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 , décroissante, telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

- (1) On s'intéresse à la fonction $x \in [0, 1] \mapsto xf(x)$. Justifier que cette fonction admet un maximum. Dans la suite on le notera $M(f)$.
- (2) Montrer que $0 \leq M(f) \leq 1$. Existe-t-il une fonction f telle que $M(f) = 1$?
- (3) Soit $f_p : x \in [0, 1] \mapsto 1 - x^p$ où p est un entier supérieur ou égal à 1. Calculer $M(f_p)$ et déterminer sa limite quand $p \rightarrow +\infty$.
- (4) (4a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie les hypothèses de l'énoncé.
- (4b) Montrer que l'ensemble des graphes de toutes ces fonctions polynomiales remplit une zone du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ que l'on déterminera graphiquement.