SESSION 2021

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Les problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

* * *

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

* * *

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les $\boxed{\textit{encadrant}}$ *ou en les* <u>*soulignant*</u>*. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la* ***clarté****, de la* ***concision*** *et de la* ***précision*** *de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandée.*

* * *

PROBLÈME A.

Dans tout le problème, ε désigne un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$. Nous notons la limite à droite d'une fonction f en un point a par $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$. Les notations alternatives usuelles $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ sont tolérées.

(1) *(1a)* Que vaut $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$?

(1b) Calculer la limite $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} I(\varepsilon)$.

(1c) Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

(1d) En déduire la valeur de $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \right)$.

(2) Soit $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

(2a) À l'aide du changement de variable $y = -x$, montrer que

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^1 \frac{f(x) - f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

(2b) Dans le cas où f est de plus impaire, montrer que

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

(3) Soit a un réel strictement positif et f_a la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} x^a & \text{si } x \geq 0 \\ -|x|^a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(3a) Montrer que f_a est continue et impaire.

(3b) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f_a(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2-2\varepsilon^a}{a}$.

(3c) Calculer $\displaystyle I(a) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f_a(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right)$, puis $\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} I(a)$.

(3d) En déduire qu'il n'existe pas de constante C telle que, pour toute fonction continue $g : [-1,1] \to \mathbf{R}$, on ait

$$\left| \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{g(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{g(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right) \right| \leq C \sup_{x\in[-1,1]} |g(x)|.$$

(4) Soit $h : [-1,1] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(4a) Justifier qu'il existe $y_0 \in [-1,1]$ tel que $|h'(y_0)| = \displaystyle\max_{y\in[-1,1]} |h'(y)|$.

(4b) Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $|h(x) - h(-x)| \leq 2x \displaystyle\max_{y\in[-x,x]} |h'(y)|$.

(4c) Montrer que, pour tout $\varepsilon \in \,]0,1[$,

$$\int_{\varepsilon}^{1} \left| \frac{h(x)-h(-x)}{x} \right| \mathrm{d}x \leq 2\,|h'(y_0)|.$$

(4d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \left| \frac{h(x)-h(-x)}{x} \right| \mathrm{d}x$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

(5) Soit $h : [-1,1] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(-x)}{x} = 2h'(0)$.

PROBLÈME B.

(6) Pour cette question, soient $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (-1,-2,1)$ et $v_3 = (2,0,3)$.

(6a) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbf{R}^3$.

(6b) Montrer que $H = \{x \in \mathbf{R}^3 :\ \exists(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2,\ x = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et tout $j \in \{1,2,3\}$, on définit le vecteur $u_{i,j} = v_i - v_j$. On note E_3 le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par la famille $(u_{i,j})_{1\leq i\leq 3, 1\leq j\leq 3}$.

(6c) Donner la liste des vecteurs $u_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$.

(6d) Que vaut $\dim(E_3)$?

Dans toute la suite du problème, $n \geq 1$ désigne un entier naturel quelconque et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forme une base de $\mathbf{R}^n$.

(7) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit $w_{i,j} = v_i - v_j$. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ engendré par la famille $(w_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Le but de cette question est de trouver la dimension de E.

- (7a) Montrer que $w_{i,j}$ est le vecteur nul si et seulement si $i = j$.
- (7b) Justifier que E est de dimension inférieure ou égale à n.
- (7c) Montrer que la famille $(w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, \ldots, w_{1,n})$ forme une famille libre de $\mathbf{R}^n$.
- (7d) Soient i et j deux entiers dans $\{1, \ldots, n\}$; exprimer le vecteur $w_{i,j}$ en fonction des vecteurs $w_{1,2}$, $w_{1,3}$, $w_{1,4}$, ..., $w_{1,n}$.
- (7e) Quelle est la dimension de E ?

(8) Soient a et b deux nombres réels. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit $z_{i,j} = av_i + bv_j$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ engendré par la famille $(z_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Le but de cette question est de trouver dans quels cas $F = \mathbf{R}^n$.

- (8a) Donner un exemple simple de nombres réels a et b pour lequel $F = \mathbf{R}^n$ et un exemple pour lequel $F \neq \mathbf{R}^n$.
- (8b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ soit inversible.
- (8c) On suppose $a^2 \neq b^2$. Trouver deux nombres réels λ et μ tels que $\lambda z_{1,2} + \mu z_{2,1} = v_1$.
- (8d) En déduire que, si $a^2 \neq b^2$, alors $F = \mathbf{R}^n$.
- (8e) Que pensez-vous du cas $a^2 = b^2$?

PROBLÈME C.

Ce problème comporte deux parties.

PARTIE I. Soit $n \geq 2$ un entier naturel et soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $\{1, 2, \ldots, n\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire $X = \min(X_1, X_2)$, minimum entre X_1 et X_2.

(9) (9a) Que vaut $P(X_1 = 1)$, la probabilité de l'évènement $\{X_1 = 1\}$?

- (9b) Calculer $P(X = n)$.
- (9c) Montrer que les évènements $\{X = n\}$ et $\{X_1 = 1\}$ sont incompatibles.
- (9d) En déduire que X et X_1 ne sont pas indépendantes.

(10)(10a) Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que $P(X \geq k) = \dfrac{(n-k+1)^2}{n^2}$.

- (10b) Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Que vaut $P(X = k)$?

(11)(11a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(11b) En déduire la valeur de l'espérance $E(X_1)$ puis calculer la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_1)}{n}$.

(11c) On admet que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrer que $E(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

(11d) Calculer la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{E(X)}{n}$.

On considère dorénavant deux nombres réels strictement positifs λ_1 et λ_2, ainsi que deux variables aléatoires T_1 et T_2 indépendantes, T_1 suivant la loi exponentielle de paramètre λ_1 et T_2 suivant la loi exponentielle de paramètre λ_2. On s'intéresse à $T = \min(T_1, T_2)$.

(12)(12a) Pour $x \in \mathbf{R}$, que vaut $P(T_1 > x)$?

(12b) Pour $x \geq 0$, que vaut $P(T > x)$?

(12c) Quelle est la loi de T ?

PARTIE II. Soit $m \geq 1$ un entier naturel. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1, \ldots, m\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire Z de loi uniforme sur $\{1, \ldots, Y\}$. L'ensemble sur lequel Z est définie est donc aléatoire : par exemple, si la réalisation de Y donne 3, alors Z est uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, tandis que si la réalisation de Y donne 5, alors Z est uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, et ainsi de suite.

(13) **Dans cette question seulement,** on suppose qu'il existe un $k \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $P(Y = k) = 1$. Quelle est la loi de Z ? Donner, sans justification, son espérance $E(Z)$.

On suppose dans toute la suite que, pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, on a $P(Y = k) > 0$.

(14)(14a) Énoncer la formule des probabilités totales.

(14b) Montrer que, pour tout $\ell \in \{1, \ldots, m\}$,

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=\ell}^{m} \frac{P(Y = k)}{k}.$$

(14c) Pour $\ell \in \{1, \ldots, m\}$, montrer que $P(Z = \ell) \leq \frac{E(Y)}{\ell^2}$.

(15) **Dans cette question seulement,** on suppose que la loi de Y est donnée par la formule $P(Y = k) = \frac{2k}{m(m+1)}$ pour $k \in \{1, \ldots, m\}$.

(15a) Pour $\ell \in \{1, \ldots, m\}$, que vaut $P(Z = \ell)$ dans ce cas ?

(15b) Pour $1 \leq \ell \leq k \leq m$, calculer $P(Y = k \mid Z = \ell)$.

(16)(16a) On considère des nombres réels positifs $\{a_{k,\ell},\ 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq \ell \leq m\}$. On considère la double somme $\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=\ell}^{m} a_{k,\ell}$. Recopier le tableau ci-dessous en cochant ou

Tournez la page S.V.P.

noircissant les cases correspondant aux indices k et ℓ pour lesquels le terme $a_{k,\ell}$ apparait dans cette double somme.

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = m$
$k = 1$					
$k = 2$					
$k = 3$					
$k = 4$					
$k = m$					

Expliquer pourquoi $\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=\ell}^{m} a_{k,\ell} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{k} a_{k,\ell}$.

(16b) Montrer que $E(Z) = \sum_{k=1}^{m} P(Y = k) \frac{k+1}{2}$.

(16c) Exprimer l'espérance de Z en fonction de celle de Y.

(16d) Est-il possible d'exprimer la variance de Z uniquement en fonction de la variance de Y ?

On suppose dorénavant que Y est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\mathbf{N}^*$ des entiers naturels strictement positifs, telle que $Y - 1$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose toujours que Z est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \ldots, Y\}$.

(17)(17a) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, que vaut $P(Y = k)$?

(17b) Montrer que, pour tout $\ell \in \mathbf{N}^*$,

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{P(Y = k)}{k}.$$

(17c) Calculer $P(Z = 1)$.