Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit x un nombre réel positif. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 & = x \\ u_{n+1} & = e^{-u_n} \end{cases}.$$

(1) Montrer qu'il existe un unique réel $\ell > 0$ tel que $\ell = e^{-\ell}$.

(2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

(3) Soient $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont monotones.

(4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

(5) Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ une fonction continue vérifiant la propriété : $\forall y \geq 1\,,\ f\left(y^{-1}\right) = f(\ln(y))$.
Montrer que f est une fonction constante.

⋆⋆⋆

Exercice 2.

(1) Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes. Calculer la covariance de X et Y puis la covariance de X et $X+Y$. Ces deux dernières variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

(2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$, respectivement.

  (2a) Quelle sont les valeurs minimale et maximale que peut prendre $X+Y$?

  (2b) Montrer que X et $X+Y$ ne peuvent pas être indépendantes sauf si X est constante.

(3) Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$, et Y une variable indépendante à valeurs dans $\mathbf{N}$.

  (3a) Soit $k \in \mathbf{N}$. Exprimer $\mathbb{P}(\{X+Y=k\} \cap \{X=1\})$ et $\mathbb{P}(\{X+Y=k\} \cap \{X=0\})$ en fonction de probabilités qui ne dépendent que de Y et du paramètre de X.

  (3b) Montrer que X et $X+Y$ ne sont pas indépendantes.