Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1.

(1) On considère la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(t) = 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

- *(1a)* Que valent le minimum et le maximum de la fonction h ?
- *(1b)* Montrer que la fonction h est périodique de période π.
- *(1c)* Déterminer l'ensemble des points en lesquels la fonction h s'annule.
- *(1d)* Représenter le graphe de la fonction h sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, en faisant apparaitre les informations obtenues dans les questions précédentes et en spécifiant la valeur de $h(0)$.

(2) Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telles que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f'(t) = g(t) \qquad \text{et} \qquad g'(t) = -4f(t) \tag{E}$$

et, de plus, $f(0) = 3$ et $g(0) = 0$.

- *(2a)* Montrer que pour tout nombre réel t, $4(f(t))^2 + (g(t))^2 = 36$.
- *(2b)* En déduire que le point de coordonnées $(f(t), g(t))$ est compris entre le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 3 et le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 6.

(3) Soit a un nombre réel strictement positif. On considère les deux suites de fonctions définies par $f_0 = f$, $g_0 = g$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$f_{n+1} = f_n + a g_n \qquad \text{et} \qquad g_{n+1} = g_n - 4a f_n .$$

- *(3a)* Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe $E_n \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $E_n = 4(f_n(t))^2 + (g_n(t))^2$.
- *(3b)* Exprimer E_n en fonction de n.
- *(3c)* Montrer que la suite $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite qu'on déterminera.
- *(3d)* Trouver l'ensemble des entiers n tels que $E_n \geq 2E_0$.

(4) Si $f = h$ (fonction de *(1)*), est-il possible de trouver une fonction g telle que le couple (f, g) vérifie (E) ?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soient p et q deux projecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que $p \circ q = q \circ p$. On pose

$$u = p + q - q \circ p .$$

(1) Montrer que u est un projecteur.

(2) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

(3) Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(p) \oplus q(\mathrm{Ker}(p))$.