Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soient a et b deux réels et soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b \end{pmatrix}.$$

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice soit inversible.

(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice soit diagonalisable.

(3) Soient $\lambda < \mu$ deux réels. Déterminez a et b de sorte que les valeurs propres de M soient λ et μ puis déterminez une base de vecteurs propres de M.

(4) Soit $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ une matrice ayant deux valeurs propres distinctes. Montrer que A est semblable à la matrice M pour des coefficients a et b bien choisis.

⋆⋆⋆

Exercice 2.

(1) Soit $x > 0$ un réel. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$.

(2) Soit $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On considère les variables aléatoires

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{(1/2 + X_k)^k}{k} \quad \text{et} \quad S = \lim_{N\to\infty} S_N.$$

(2a) Montrer que, pour tout $y \geq 0$, pour tout entier $k \geq 1$, $(1+y)^k \geq 1 + ky$.

(2b) Montrer que $\left\{ S_{4N} < \frac{N}{2} \right\} \subset \left\{ \sum_{k=1}^{4N} X_k \leq N \right\}$.

(2c) Montrer que $\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{4N} X_k \leq N \right) \leq \frac{1}{N}$.

(2d) En déduire que $\mathbb{P}(S = +\infty) = 1$.