Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On considère une variable aléatoire X uniforme sur $\{-1,0,1\}$ et on pose $Y = X^2$.

(1) Donner la loi de Y.

(2) Montrez que $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.

(3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère une partie non vide A de $\mathbf{R}^n$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall u, v \in A,\ \forall t \in [0,1], \qquad tu + (1-t)v \in A \tag{C}$$

(1) Montrer que la propriété (C) est vérifiée dans le cas où A est un sous-espace vectoriel.

On suppose dorénavant que $n = 2$.

(2) Dessiner un exemple d'ensemble vérifiant la propriété (C).

(3) Dessiner un exemple d'ensemble ne vérifiant pas la propriété (C).

(4) On fixe $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et on s'intéresse à la fonction $\varphi^A_{(a,b)} : (x,y) \in A \mapsto \|(x,y) - (a,b)\|$

(4a) Montrer que, si $(a,b) \in A$ alors la fonction $\varphi^A_{(a,b)}$ atteint sa borne inférieure en un unique point que l'on déterminera.

(4b) On suppose ici que $A = \{(x,y) \ :\ y = 1\}$ et (a,b) est quelconque. Calculer la borne inférieure de $\varphi^A_{(a,b)}$.

(4c) Vérifier que, pour tout (x_1,y_1), (x_2,y_2), $(a,b) \in \mathbf{R}^2$,

$$\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|^2 = 2\|(a,b) - (x_1,y_1)\|^2 + 2\|(a,b) - (x_2,y_2)\|^2 - 4\left\|(a,b) - \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)\right\|^2$$

(4d) En déduire que, si $\varphi^A_{(a,b)}$ atteint sa borne inférieure, alors elle l'atteint en un unique point.

(4e) Construire un exemple où la fonction $\varphi^A_{(a,b)}$ n'atteint pas sa borne inférieure. *On se satisfera d'une justification informelle.*