Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère l'application

$$\Phi : P(x) \in \mathbf{R}_{2n}[x] \mapsto (x^2 - 1)\, P'(x) - 2nx\, P(x)\,.$$

(1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_{2n}[x]$.

(2) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que la fonction $f_\lambda : x \in \,]0,1[\, \mapsto (1+x)^{n-\frac{\lambda}{2}}(1-x)^{n+\frac{\lambda}{2}}$ vérifie la relation

$$\forall x \in \,]0,1[\,, \qquad (x^2-1)\, f_\lambda'(x) = (2nx + \lambda) f_\lambda(x)\,.$$

(3) Montrer que Φ est diagonalisable.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Une joueuse joue à la belote en ligne. Elle s'arrête lorsqu'elle gagne une partie, et continue sinon. Les parties sont indépendantes les unes des autres. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de parties jouées.

(1) On suppose pour l'instant que chaque partie est gagnée avec probabilité $\frac{1}{2}$.

- *(1a)* Donner la loi de X et le nombre moyen de parties jouées.
- *(1b)* Pour pouvoir participer à une partie, la joueuse paye 10 jetons. En cas de victoire, elle gagne 15 jetons, et rien en cas de défaite. Quelle est l'espérance du nombre de jetons gagnés (jetons payés déduits) ?

(2) En réalité, la probabilité de gagner la k-ème partie est $a_k \in \,]0,1[$.

- *(2a)* Que vaut $\mathbb{P}(X = i)$?
- *(2b)* Dans le cas où $a_k = \dfrac{1}{k+1}$, montrer que $\mathbb{E}[X] = +\infty$.
- *(2c)* Dans le cas où la suite (a_k) est croissante, montrer que $\mathbb{E}[X] < \infty$.