Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à coefficients positifs ou nuls. On s'intéresse à la série $\sum u_n w_n$. *Les questions sont indépendantes : les hypothèses données dans une question sont valables* ***uniquement dans cette question****.*

(1) On prend $u_n = \frac{1}{n^3}$. Donner un exemple de suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum u_n w_n$ converge, et un exemple où cette série diverge.

(2) On suppose que la série $\sum u_n$ converge et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Montrer que la série $\sum u_n w_n$ converge.

(3) On suppose que pour toute suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la série $\sum u_n w_n$ converge. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.

(4) On suppose que $\sum u_n$ converge. Que se passe t-il lorsque, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n = u_n$?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée fixée. On s'intéresse à

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R}) \ \text{ telles que } \ MA = AM \right\}.$$

(1) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$.

(2) *(2a)* Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont coefficient sur la ligne i et la colonne j vaut 1 et tous les autres valent 0. Déterminer $\mathcal{C}(E_{i,j})$.

(2b) Déterminer $\bigcap_{A\in\mathbf{M}_n(\mathbf{R})} \mathcal{C}(A)$.

(3) Pour $1 \le k \le n$ on note I_k la matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$(I_k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \le k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(3a) Déterminer $\mathcal{C}(I_k)$.

(3b) Soit P une matrice inversible. Montrer que M appartient à $\mathcal{C}(A)$ si et seulement si $P^{-1}MP$ appartient à $\mathcal{C}(P^{-1}AP)$.

(3c) Supposons que A est la matrice d'un projecteur. Déterminer $\mathcal{C}(A)$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $n \geq 4$ un entier et soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$. On note D la variable aléatoire égale au déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $\mathbb{P}\big(\{D = 0\} \cap \{Y = 1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{D = 0\} \cap \{Y = 0\}\big)$.

(2) Montrer que $\mathbb{P}(D = 0) > \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2$.

(3) Les événements D et Y sont-ils indépendants ?

On note Δ le discriminant de la fonction polynômiale de la variable x égale au déterminant de la matrice $M - xI$, où I est la matrice identité de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

(4) Montrer que $\mathbb{P}(\Delta > 0 \mid Y > 0) = 1$.

(5) Montrer que l'événement « La matrice M est diagonalisable » est certain.

⋆⋆⋆

Exercice 2.

(1) On considère, pour $\alpha > 0$, la fonction définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ par

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin(x^\alpha)}{x}.$$

(1a) Montrer que $f_\alpha(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

(1b) Justifier que f_α est dérivable et calculer sa dérivée.

(1c) Trouver une valeur de α pour laquelle f'_α tend vers 0 en $+\infty$, et une autre pour laquelle f'_α n'a pas de limite.

(2) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(2a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$g(n+1) - g(n) = g'(x_n).$$

(2b) On suppose que, en $+\infty$, g admet une limite ℓ et g' admet une limite ℓ'. Montrer que $\ell' = 0$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1.

(1) Soient a et b deux réels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a - a^2 & -ab \\ -ba & b - b^2 \end{pmatrix}$$

soit inversible.

Soient n réels strictement positifs $d_1, d_2, \dots, d_n$. On note $S = \sum_{k=1}^{n} d_k$ et on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} d_1 - d_1^2 & -d_1 d_2 & -d_1 d_3 & \cdots & -d_1 d_n \\ -d_1 d_2 & d_2 - d_2^2 & -d_2 d_3 & \cdots & -d_2 d_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -d_{n-1} d_n \\ -d_n d_1 & \cdots & \cdots & -d_n d_{n-1} & d_n - d_n^2 \end{pmatrix}.$$

On admet que, pour toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, on a

$$X^{\mathrm{T}} M X = \sum_{k=1}^{n} d_k (1 - S) x_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_i d_j (x_i - x_j)^2.$$

(2) Si $S < 1$, montrer que la matrice est inversible.

(3) Si $S = 1$, calculer le noyau de la matrice M.

(4) Démontrer le résultat admis par l'énoncé.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On s'intéresse à la loi d'une variable aléatoire notée X qui donne la note obtenue à un examen par un·e étudiant·e tiré·e au hasard dans une population. On suppose que cette population est constituée de deux sous-populations : les étudiant·es ayant révisé et les étudiant·es n'ayant pas révisé. On suppose que la note d'un·e étudiant·e ayant révisé suit un loi normale de moyenne μ_A et de variance σ_A^2 et que celle d'un·e étudiant·e n'ayant pas révisé suit une loi normale de moyenne μ_B et de variance σ_B^2, avec $\mu_A > \mu_B$. On note $p \in]0,1[$ la proportion d'étudiant·es de la population ayant révisé.

(1) Montrer que la variable aléatoire X peut s'écrire

$$X = YZ + (1 - Y)Z'$$

où Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p et Z et Z' sont indépendantes de Y.

(2) Montrer que $\mathbb{E}[X] = p\mu_A + (1 - p)\mu_B$.

(3) Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire X et montrer que X possède une densité. Tracer l'allure de cette densité.

(4) Calculer la variance de X et montrer que $\mathbb{V}[X] > p\sigma_A^2 + (1 - p)\sigma_B^2$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère $n+1$ boîtes, numérotées de 0 à n. Pour chaque $k \in \{0, \ldots, n\}$, la boîte numérotée k contient k boules rouges et $n-k$ boules bleues. On choisit une boîte uniformément au hasard, c'est-à-dire que chaque boîte a une probabilité $\frac{1}{n+1}$ d'être sélectionnée. Ensuite, on tire uniformément au hasard une boule dans cette boîte. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note B_k l'événement « la boîte numéro k a été tirée », ainsi que R l'événement « une boule rouge a été tirée ».

(1) Déterminer $\mathbb{P}(R)$.

(2) Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. Les événements R et B_k sont-ils indépendants ?

(3) Déterminer la probabilité qu'on ait sélectionné la boîte numéro n sachant qu'on a tiré une boule rouge.

(4) On note X le nombre de boules rouges que contient la boîte qu'on a tiré au hasard. Déterminer $\mathbb{E}[X]$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. À toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on associe la matrice de $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ définie par

$$M_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère une fonction f, continue en 0, et qui vérifie la propriété

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad M_f(x+y) = M_f(x) M_f(y) . \qquad (\star)$$

(1) *(1a)* Traduire $(\star)$ en une équation sur f.

(1b) Que vaut $f(0)$?

(1c) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

(1d) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

Indication. On pourra intégrer l'équation trouvée en *(1a)* par rapport à y.

(2) Déterminer l'ensemble des fonctions qui sont continues en 0 et vérifient la propriété $(\star)$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On définit l'application φ sur l'ensemble des couples de matrices ayant la même taille par

$$\varphi(A,B)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}a_{ij}b_{ij}\,,$$

où l'on a utilisé les notations $A=(a_{ij})_{1\le i\le p,\,1\le j\le q}$ et $B=(b_{ij})_{1\le i\le p,\,1\le j\le q}$.

(1) Montrer que $\varphi(A,A)=0$ si et seulement si la matrice A est nulle.

(2) Soient $A\in\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{R})$, $P\in\mathbf{M}_{q,r}(\mathbf{R})$ et $Q\in\mathbf{M}_{p,r}(\mathbf{R})$. Montrer que $\varphi(AP,Q)=\varphi(P,A^{\mathrm{T}}Q)$.

(3) Pour A, $B\in\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{R})$, montrer que $\varphi(A,B)=\mathrm{Tr}(AB^{\mathrm{T}})=\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}B)$.

(4) En déduire une nouvelle démonstration, moins calculatoire, du résultat de la question *(2)*.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère un entier $n\ge 1$ et une fonction polynômiale de la forme

$$p: x\mapsto x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

où on suppose $a_0\neq 0$. On introduit la fonction $H:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par

$$H(x)=x^n-\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\,x^k.$$

(1) Montrer que la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=-\dfrac{H(x)}{x^n}$ est strictement décroissante.

(2) Déterminer ses limites quand x tend vers 0 et x tend vers $+\infty$.

(3) En déduire que H s'annule une unique fois sur $\mathbf{R}_+$.

On note α le réel positif tel que $H(\alpha)=0$.

(4) On suppose que $p(x_0)=0$. Montrer que $|x_0|\le\alpha$.

(5) On note $A=\max\limits_{0\le k\le n-1}|a_k|$. Montrer que, pour tout $x\in\mathbf{R}_+\setminus\{1\}$, on a $H(x)\ge x^n-A\,\dfrac{x^n-1}{x-1}$.

(6) En déduire que $\alpha\le A+1$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Deux personnes s'affrontent aux échecs. La joueuse A a une probabilité p de l'emporter, le joueur B a une probabilité q de l'emporter, et il y a match nul avec probabilité $r = 1 - p - q$. En cas de match nul, une nouvelle partie est jouée immédiatement, et ce jusqu'à ce que l'une des personnes gagne. Les parties sont mutuellement indépendantes. On note N le nombre de parties jouées.

(1) Quelle est la loi de N ?

(2) Le jeu se termine au bout d'une seule partie. Quelle est la probabilité que la joueuse A ait gagné ?

(3) Quelle est la probabilité que la joueuse A gagne, sans considération du nombre de parties jouées avant la victoire ?

On suppose à présent que les probabilités de victoires et de match nul varient avec le temps. À la n-ème partie, on note p_n la probabilité de victoire de la joueuse A, q_n celle du joueur B, et $r_n = 1 - p_n - q_n$ la probabilité de match nul.

(4) Calculer la probabilité que la joueuse A gagne sachant qu'il y a eu exactement k parties. Qu'observe-t-on ?

(5) On suppose qu'il existe $\delta < 1$ tel que, pour tout n, on ait $r_n \leq \delta$. Montrer que le jeu s'arrête au bout d'un temps fini.

(6) On suppose que $r_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 2$, on a $r_n = 1 - \frac{1}{n^2}$. Montrer que $\mathbb{P}(N > k) \to \frac{1}{2}$ lorsque $k \to \infty$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère l'ensemble

$$F = \{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n} \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\}$$

et le sous-espace vectoriel G de $\mathbf{R}^{2n}$ engendré par le vecteur $u = (1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)$.

(1) *(1a)* Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{2n}$.

(1b) Calculer sa dimension.

(2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^{2n}$.

(3) Soit $x \in \mathbf{R}^{2n}$.

(3a) Donner le projeté de x sur F parallèlement à G.

(3b) Donner le symétrique de x par rapport à F le long de G.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On modélise la propagation d'une fausse information (infox), jour après jour, de la manière suivante. Au k-ième jour, on note p_k la proportion de gens ne croyant pas à l'infox, c_k la proportion de gens y croyant, et h_k la proportion d'hésitants. Initialement, ces proportions appartiennent à $[0,1]$ et vérifient $p_0 + c_0 + h_0 = 1$. Chaque jour,

— $\frac{1}{4}$ des gens ne croyant pas à l'infox et $\frac{3}{4}$ des gens y croyant se mettent à hésiter ; les autres maintiennent leur opinion.

— $\frac{1}{2}$ des hésitants décident de ne pas y croire, $\frac{1}{4}$ d'y croire, et le quart restant continue à hésiter.

Il est possible de changer d'avis plusieurs fois de suite. Ainsi, on a

$$p_{k+1} = \frac{3}{4}p_k + \frac{1}{2}h_k \,; \qquad c_{k+1} = \frac{1}{4}c_k + \frac{1}{4}h_k \,; \qquad h_{k+1} = \frac{1}{4}p_k + \frac{3}{4}c_k + \frac{1}{4}h_k \,.$$

On introduit les notations suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour } k \in \mathbf{N}, \quad Y_k = \begin{pmatrix} p_k \\ c_k \\ h_k \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $p_k \in [0,1]$, $c_k \in [0,1]$, $h_k \in [0,1]$, et $p_k + c_k + h_k = 1$.

(2) Montrer que $Y_{k+1} = \frac{1}{4}AY_k$.

(3) Calculer Au, Av et Aw. Que peut-on en déduire sur la matrice A ?

(4) Montrer qu'il existe α, β et γ trois réels tels que $Y_0 = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

(5) Déterminer la limite de c_k lorsque $k \to +\infty$ en fonction de α, β et γ.

(6) Montrer que α ne dépend pas du choix de Y_0.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

(1) Montrer que pour tous réels x et y, on a $h(y) = h(x) + (y-x)h'(x) + \displaystyle\int_x^y (y-t)h''(t)\mathrm{d}t$.

(2) Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $h''(x) > 0$. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall y \in [x-a, x+a], \quad \int_x^y (y-t)h''(t)\mathrm{d}t > 0 \,.$$

(3) Montrer que h vérifie la propriété

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall a > 0,\ h(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} h(y)\mathrm{d}y$$

si et seulement si h est une fonction affine.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On observe une population de bactéries. On suppose que l'âge T d'une bactérie choisie au hasard a pour densité la fonction

$$f : t \in \mathbf{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ k\, 2^{1-t} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}.$$

(1) Calculer k et déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

(2) Quelle est la probabilité que l'âge d'une bactérie choisie au hasard soit compris entre 0 et $1/2$?

(3) On admet que la masse d'une bactérie est une fonction affine de son âge : $M = m_0(1+T)$, pour un certain $m_0 \in \mathbf{R}_+^\star$. Calculer l'espérance de la masse d'une bactérie choisie au hasard.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée, et soit $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ une matrice colonne. On s'intéresse à la question suivante : existe-il une unique matrice colonne $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telle que, pour tout matrice ligne $Y \in \mathbf{M}_{1,n}(\mathbf{R})$, on ait $YMX = YB$?

(1) On suppose que la matrice M n'est pas inversible.

(1a) Constuire un exemple où il n'est pas possible de trouver un X qui convient.

(1b) Montrer que, dans le cas où X existe, X n'est pas unique, c'est-à-dire qu'on peut trouver d'autres solutions.

On suppose désormais que M est inversible.

(2) Démontrer que X répond à la question si et seulement si $X = M^{-1}B$.

(3) Montrer qu'on peut remplacer la question par : existe-il une unique matrice colonne $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telle que, pour tout matrice ligne $Y \in \mathbf{M}_{1,n}(\mathbf{R})$, on ait $YM^{\mathrm{T}}MX = YM^{\mathrm{T}}B$?

On rappelle que M^{T} est la transposée de la matrice M.

(4) On introduit la fonction $\varphi : \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(Z) = \frac{1}{2} Z^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} MZ - Z^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} B.$$

On note X la solution du problème. Montrer que

$$\forall Z \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \qquad \varphi(X+Z) \geq \varphi(X).$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soient (u, v, w) une base de $\mathbf{R}^3$.

(1) Montrer que $(u+v, u+w, v+w)$ est aussi une base de $\mathbf{R}^3$.

On construit une matrice aléatoire de la manière suivante : chacune de ses colonnes est choisie uniformément au hasard parmi les vecteurs u, v, w, $u+v$, $u+w$, $v+w$. Les trois choix sont mutuellement indépendants et il est possible de choisir plusieurs fois le même vecteur. On considère les deux évènements

— D : « on a tiré trois colonnes différentes » ;

— I : « la matrice obtenue est inversible ».

(2) Calculer $\mathbb{P}(D)$ et en déduire une majoration de $\mathbb{P}(I)$.

(3) Calculer $\mathbb{P}(D \mid I)$ et $\mathbb{P}(I \mid D)$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier. On introduit la fonction $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ définie par

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n e^{x_j}} \left(e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_n}\right).$$

(1) *(1a)* Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$L(x_1 + \lambda, \ldots, x_n + \lambda) = L(x_1, \ldots, x_n).$$

(1b) Soit y_1, …, y_n des réels strictement positifs, tels que $\sum_{j=1}^n y_j = 1$. Montrer qu'il existe un unique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ et

$$L(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n).$$

On pourra introduire $S = \sum_{j=1}^n e^{x_j}$ et commencer par déterminer la valeur de S.

(1c) La fonction L est-elle injective ? Surjective ?

(2) On suppose désormais $n = 2$.

(2a) Pour $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, on note $(y_1, y_2) = L(x_1, x_2)$. Montrer que, si $x_1 \neq x_2$,

$$|y_2 - y_1| < |x_2 - x_1|.$$

(2b) Soit $0 < a < 1$. On définit une suite par $a_0 = a$ et, pour tout $k \geq 1$, $L(a_{k-1}, 1 - a_{k-1}) = (a_k, 1 - a_k)$. Justifier que cela définit bien la suite de manière unique, puis montrer que cette suite converge.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1.

(1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

(1a) Montrer que A est inversible.

(1b) Résoudre le $AX = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix}$.

(1c) Un calcul donne $A\begin{pmatrix} 0.2 \\ 4.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \end{pmatrix}$. En quoi cela peut-il paraître surprenant ?

(2) Soit maintenant $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous non nuls. Soient deux matrices colonne $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $R \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On note X et $\tilde{X}$ les solutions de

$$AX = B \qquad \text{et} \qquad A\tilde{X} = B + R.$$

Pour une matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ quelconque, on note $\|Y\| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$.

(2a) Montrer que

$$\max_{1\leq k\leq n} \frac{1}{|\lambda_k|} = \frac{1}{\min\limits_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|}.$$

(2b) Montrer que

$$\frac{\|X - \tilde{X}\|\,\|B\|}{\|R\|\,\|X\|} \leq \frac{\max\limits_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|}{\min\limits_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|}.$$

(2c) La matrice A étant fixée, construire explicitement B et R pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité précédente.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit n un entier strictement positif et soient n^2 variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, …, X_{n^2} suivant la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

(1) *(1a)* Déterminer $p_n = P(X_1X_2\cdots X_n > 0)$.

(1b) Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(2) *(2a)* On note $q_n = P(X_1X_2\cdots X_{n^2} > 0)$. Exprimer q_n en fonction de p_n.

(2b) Donner un équivalent de q_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(3) Montrer que $\mathbb{E}\left[X_1X_2\cdots X_{n^2}\right]$ tends vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\textit{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Une fonction polynomiale $p \in \mathbf{R}[x]$ est dite *positive* si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $p(x) \geq 0$.

(1) Donner un exemple d'une fonction polynomiale positive non constante.

(2) Montrer que le degré d'une fonction polynomiale positive p non nulle est pair et que son coefficient dominant est strictement positif, c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec $a_{2n} > 0$.

(3) On considère **dans cette question** une fonction polynomiale $p : x \mapsto a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ avec $a_2 > 0$.

(3a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a_2, a_1 et a_0 pour que p soit positive.

(3b) Montrer alors qu'il existe une fonction polynomiale p_1 de degré 1 et une fonction polynomiale p_0 de degré 0 telles que $p(x) = p_1(x)^2 + p_0(x)^2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

On pourra utiliser le résultat suivant, qu'on ne demande pas de démontrer : si p est une fonction polynomiale de degré pair et de coefficient dominant positif, alors il existe un réel x_0 tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad p(x) \geq p(x_0).$$

(4) On considère une fonction polynomiale positive p et on note x_0 un nombre réel tel que $p(x) \geq p(x_0)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe un entier k non nul, un réel α et une fonction polynomiale q non nulle en x_0, tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on ait $p(x) = (x - x_0)^{2k} q(x) + \alpha^2$.

(5) Montrer que, si p est fonction polynomiale positive de degré $2n$, alors il existe $p_0, \ldots, p_n$ des fonctions polynomiales (éventuellement nulles) telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$p(x) = p_0(x)^2 + \cdots + p_n(x)^2.$$

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère p matrices colonnes $X_1, \ldots, X_p$ dont les coordonnées sont notées par $X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{p,j} \end{pmatrix}$, pour $1 \leq j \leq p$. On introduit la matrice $X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$.

(1) Donner la dimension de l'image de $X_1 X_1^{\mathrm{T}}$, où X_1^{T} désigne la transposée de X_1.

(2) Soit $1 < k < p$. Montrer que $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} X_\ell X_\ell^{\mathrm{T}}$ n'est pas inversible.

(3) Montrer que $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{p} X_\ell X_\ell^{\mathrm{T}} = X X^{\mathrm{T}}$.

(4) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{p} X_\ell X_\ell^{\mathrm{T}}$ soit inversible.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On dit qu'une fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ vérifie la propriété $\mathbf{P}$ si

$$\forall x > 0,\ \forall y > 0,\ \forall a \in [0,1], \qquad af(x) + (1-a)f(y) \leq f(ax + (1-a)y)\,.$$

(1) Soit f une fonction vérifiant la propriété $\mathbf{P}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, pour tous réels strictement positifs $x_1, x_2, \dots, x_n$ et tous réels positifs $a_1, \dots, a_n$ tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \leq f\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right).$$

Soient $a \in [0,1]$ et $y > 0$ des réels fixés. On considère la fonction $g :]0, y] \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x) = \ln(ax + (1-a)y) - a\ln(x) - (1-a)\ln(y)\,.$$

(2) Dresser le tableau de variation de g.

(3) En déduire que la fonction $\ln$ vérifie la propriété $\mathbf{P}$.

(4) Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $y_1, y_2, \dots, y_n$ des réels tous strictement positifs tels que $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} y_k \leq \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k^{\frac{1}{x_k}}\,.$$

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère l'expérience aléatoire suivante. On tire d'abord un entier naturel $\mathcal{I}$ selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Puis on tire un réel uniformément au hasard dans l'intervalle $[\mathcal{I}, \mathcal{I}+1]$. On note Y le résultat obtenu.

(1) *(1a)* Déterminer la fonction de répartition de Y.

(1b) Cette fonction est-elle continue ? Est-elle dérivable ?

L'entier $\mathcal{I}$ étant toujours tiré selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, on choisit maintenant un réel, noté X, uniformément dans l'intervalle $[0, \mathcal{I}+1]$.

(2) *(2a)* Montrer que, pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X \leq t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\min(t, k+1)}{k+1} \frac{\lambda^k}{k!}\,.$$

(2b) Calculer cette somme lorsque $0 \leq t \leq 1$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\textit{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1.

(1) Soient $a > 0$ et $c \leq 0$ deux nombres réels. On considère la fonction

$$f_{a,c} : b \mapsto \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(1a) Tracer le graphe de la fonction $f_{a,0}$.

(1b) Déterminer les asymptotes de $f_{a,c}$ quand $b \to +\infty$ et $b \to -\infty$.

(2) Soit $b > 0$ et $c \neq 0$ deux réels fixés.

(2a) Donner le domaine de définition de la fonction

$$g_{b,c} : a \mapsto \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(2b) Montrer que $\lim_{a \to 0} g_{b,c}(a) = -\frac{c}{b}$.

(2c) On considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Qu'a t-on montré à la question précédente sur cette fonction ? Est-ce surprenant ?

⋆⋆⋆

Exercice 2. On s'intéresse au jeu suivant. Une première joueuse lance un dés à n faces qui donne son score, que l'on note X. Une seconde joueuse lance deux dés à n faces, dont la somme donne son score, noté Y. Les dés sont équilibrés et les lancers sont mutuellement indépendants. La personne qui fait le plus haut score gagne ; il y a match nul en cas d'égalité.

(1) Donner la loi de X et celle de Y.

(2) Déterminer la probabilité qu'il y ait égalité. Vérifier votre résultat pour $n = 1$ et $n = 2$.

(3) Déterminer la probabilité que $X > Y$. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$?

(4) On sait qu'il n'y a pas eu d'égalité. Quelle est la probabilité que la première joueuse ait gagné ?