Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

ENS Paris – Épreuve orale de mathématiques 2022

Nina Aguillon, Jérémie Bettinelli

Durée de l'épreuve. 90 min de préparation et 30 min de passage (dont au plus 15 min de présentation sans intervention du jury).

Modalités. Deux exercices indépendants à préparer. **calculatrice interdite**

1 Commentaires généraux

Distribution des notes. Cette année, 64 candidat·es ont passé l'épreuve orale de mathématiques. La moyenne des notes s'élève à 10.55 avec un écart-type de 4.66. La distribution est la suivante.

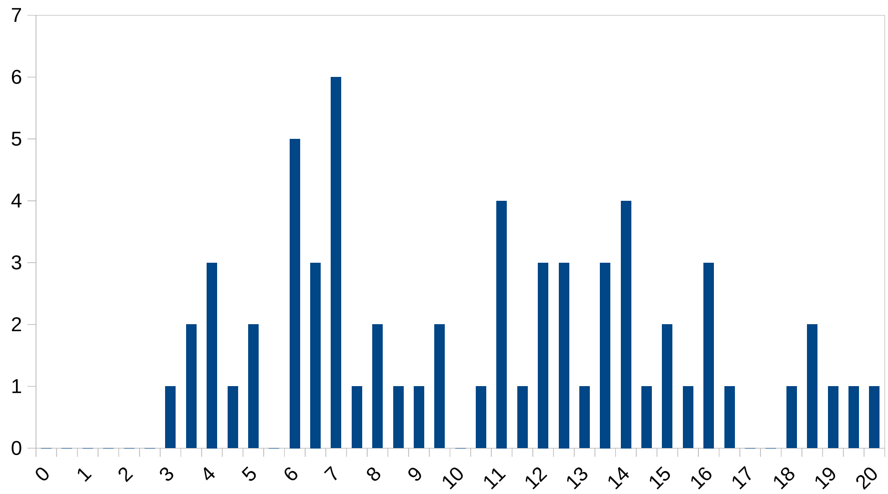

FIGURE 1 – Histogrammes des notes obtenues à l'oral.

Déroulement de l'épreuve. Les candidat·es disposent tout d'abord de 90 min pour préparer leur passage à l'oral. Chaque planche est constituée de deux exercices indépendants. Chaque couplage est construit dans un triple objectif d'équilibre : couverture thématique (analyse, algèbre, probabilités), difficulté (deux exercices moyens, ou bien un exercice facile ou court couplé avec un plus difficile ou long) et originalité. Comme les années précédentes, nous avons prêté une attention toute particulière à la progressivité des planches, qui contenaient toutes des questions faciles pour mettre en confiance les candidats et candidates, mais également des questions plus difficiles permettant de briller. Mentionnons que, dans un souci d'équité, toutes les planches sont prêtes avant le début des épreuves, et sont distribuées selon un ordre aléatoire défini avant le début des oraux.

Le passage à l'oral, qui dure 30 min, se compose des deux phases suivantes.

— La *présentation* (15 min maximum) : le candidat ou la candidate présente à sa guise et sans intervention du jury les éléments résolus lors de sa préparation.

— La *reprise* (reste du temps) : le jury mène la discussion. Il revient d'abord sur ce qui a été écrit **et** dit lors de la présentation afin de rectifier certaines erreurs ou corriger des maladresses. Ensuite, afin de tester les réactions et le recul, les examinateurs abordent les questions qui n'ont pas été réussies en donnant des indications. Dans le cas de très bons oraux, le jury n'hésite pas à poser des questions supplémentaires d'ouverture ne figurant pas dans la planche.

Nous insistons sur le fait que la prestation orale est notée sur sa totalité. Ainsi, une présentation courte n'est pas pénalisée en soi, et elle laisse simplement plus de temps au candidat ou à la candidate pour améliorer sa note lors de la reprise. Celle-ci est très importante pour la détermination de la note : une personne ayant bloqué sur des questions pourra obtenir une très bonne note s'il ou elle réussit à bien exploiter les indications données par le jury et montre une bonne maitrise des notions essentielles du programme sans dire ou écrire des assertions fausses.

Dans l'ensemble, le déroulement de l'oral est très satisfaisant et permet au jury de bien évaluer les candidates et les candidats.

Notation. La note finale a été obtenue en prenant en compte les critères suivants : connaissance du cours, autonomie sur les questions de base et les questions difficiles, absence d'erreurs grossières, réactivité et capacité à se corriger lors de la reprise, intuition et rédaction mathématique, et avancement global à l'issue de la reprise.

Public. Cette année, le public a de nouveau été autorisé. Les oraux se sont bien déroulés. Rappelons que le public, qu'il s'agisse d'élèves, d'enseignant·es, ou autre, qu'il assiste à une épreuve ou qu'il reste dans les couloirs pendant une épreuve, doit respecter un silence total et ne manifester aucune réaction jusqu'à la sortie de la candidate ou du candidat, s'abstenant là encore de communiquer avec elle ou lui avant sa sortie des couloirs.

2 Conseils

Dans leur immense majorité, les personnes interrogées sont bien préparées et, pour la plupart, à l'écoute du jury, réactives et agréables à interroger. Certaines prestations pourraient être améliorées en prenant en compte les points suivants.

2.1 Présentation

Gestion du tableau. Lors de la présentation, le jury n'intervient que pour mettre un terme à la présentation lorsque les 15 min imparties sont écouées ou en cas de force majeure (par exemple si les feutres fonctionnent mal). La gestion du tableau est laissée libre, cela fait partie de la présentation de leurs résultats. Il est conseillé d'effacer le moins possible afin que le jury puisse plus facilement revenir sur certains points. Il n'est pas utile de demander l'accord du jury pour effacer une partie du tableau pendant cette phase, ce dernier répondra systématiquement qu'il laisse la personne examinée gérer seule.

Lors de la présentation, nous rappelons qu'il n'est pas nécessaire de tout écrire (notamment les détails de calculs) mais qu'il est important de noter les points clés, surtout lorsqu'il peut y avoir ambiguïté (par exemple sur une inégalité large ou stricte). Il n'est pas non plus nécessaire de recopier une donnée de l'énoncé. Séparer le tableau en 3 ou 4 et écrire normalement suffit généralement à bien gérer son tableau.

Pistes infructueuses. Nous encourageons les candidates et les candidats à mentionner les pistes concrètes tentées lorsqu'une question n'a pas pu être résolue. Il est tout à fait possible d'exposer un raisonnement incomplet ou sur lequel on a des doutes, en disant très clairement quels sont les limites du raisonnement et les aspects laissés en suspens. Ce point a été bien pris en compte par la plupart des admissibles cette année.

Gestion du temps. Nous rappelons que, depuis 2021, la présentation dure 15 min maximum. Il ne faut pas chercher à utiliser absolument ces 15 min maximales allouées à la présentation ; il est conseillé de **viser une durée comprise entre 10 min et 15 min** pour cette phase. Cette année, la plupart des présentations (52 sur 64) sont tombées dans cet intervalle de temps ; nous avons néanmoins dû interrompre 7 examinés arrivés au terme des 15 min. Le temps moyen observé a été de 12 min.

Il est toujours judicieux de présenter de manière concise les étapes importantes du raisonnement. En cas de doute, le jury reviendra sur les détails lors de la reprise. Quelques personnes ont eu du mal à trouver le bon équilibre, détaillant parfois excessivement des calculs simples ou passant sous silence des points clés. Lorsque l'on a beaucoup de choses à présenter, il s'agit de faire un choix dans les détails donnés.

Il faut également veiller à ne pas parler trop vite, surtout sans rien écrire au tableau. Cet écueil n'a concerné qu'une poignée d'oraux cette année.

2.2 Reprise et interaction avec le jury

Gestion du tableau. Lors de la reprise, nous encourageons à écrire au tableau, à la fois les indications du jury et les pistes de refléxion. Les formules énoncées oralement peuvent être ambivalentes et la simple écriture au tableau permet par exemple au jury de rectifier une erreur d'interprétation. Toute prise d'initiative consistant à tenter des choses en les écrivant au tableau est **fortement valorisée**. À cette étape, il est important d'obtenir l'accord du jury avant d'effacer une partie du tableau.

Notes personnelles. Lors de la reprise, nous conseillons de laisser les notes de coté et de ne s'y référer que ponctuellement pour se rappeler d'un résultat non présenté. Nous encourageons plutôt à se concentrer sur l'échange en cours avec le jury, qui pourra rappeler tous les éléments utiles qui auraient été effacés.

Attitude du jury. Le jury, toujours bienveillant, cherche à évaluer le plus justement les candidates et candidats et n'essaiera jamais de les « piéger ». En général, lorsqu'une personne est laissé sans indication en silence, c'est que le jury estime qu'elle est sur une bonne piste.

Dans la mesure du possible, le jury reste neutre dans son attitude et ne montre ni enthousiasme ni mécontentement. Ainsi, nous encourageons les candidates et candidats à se méfier de l'impression qu'elles ou ils peuvent avoir de leur prestation et à ne pas chercher à interpréter les réactions du jury. Cela est valable tout au long de la prestation : il ne faut jamais se décourager et faire de son mieux pendant toute la durée de l'oral. La présence de deux exercices et le découpage de l'oral en deux parties permet une évaluation large ; une difficulté passagère n'équivaut pas à une mauvaise note. Chaque année, quelques personnes connaissent un début difficile mais tirent remarquablement profit de la reprise.

Attitude des candidates et candidats. Les épreuves orales sont stressantes et le déroulement de l'oral, imprévisible par nature, peut être destabilisant. Nous invitons les personnes interrogées à traiter le jury avec respect et tenir compte de ses indications. Le jury peut avoir été dépassé par le rythme de certaines présentations et demander de répéter un point qui a été mentionné à l'oral. Cela ne signifie pas forcément que le point a mal été traité et il convient de le réexpliquer. A contrario, le jury demande fréquemment des précisions sur des points qui ont été traités de façon incomplète ou incorrecte. Dans ce cas, nous invitons les candidats et les candidates à réagir avec humilité et à se corriger.

Nous avons malheureusement vu certaines personnes s'enferrer dans leurs erreurs sans tenir compte des multiples indications du jury visant à les remettre dans le droit chemin. Nous avons encore vu cette année, quoique très rarement, des attitudes nonchalantes frôlant le mépris. Plus précisément, nous déconseillons les comportements suivants, particulièrement les deux premiers.

— Excès de confiance en soi. Ici, les interrogés agissent comme s'ils ne comprenaient pas les questions. Ils répètent mot pour mot leurs arguments, même quand le jury y revient avec insistance, et refusent de remettre en cause leur raisonnement. Ces personnes perdent énormément de temps et cette absence de remise en question est pénalisée.

— Absence d'écoute du jury. Le jury propose une piste ou admet un résultat et le candidat ou la candidate passe outre et continue sur sa propre piste. Bien que cette dernière puisse aboutir dans certains cas (exceptionnels) et malgré la frustration que cela peut occasionner, cette attitude est à proscrire. Nous invitons à suivre la piste proposée par le jury et à réfléchir ultérieurement à sa propre piste.

— Refus d'écrire. L'objet de la reprise est souvent de préciser les raisonnements. On demande donc d'énoncer les hypothèses des théorèmes, de traiter des cas simples, ou de construire des contre-exemples. Beaucoup de personnes ont de bonnes idées mais rechignent à écrire précisément les choses au tableau. Lorsque le jury le demande, une rédaction précise est attendue ; cela fait partie des compétences évaluées.

— Utilisation de notions hors programme. Rappelons que les « demi-souvenirs » peuvent amener à énoncer des énormités. Tous les exercices peuvent se traiter dans le cadre strict du programme officiel. Nous décourageons l'emploi de notions et même de vocabulaire hors programme. Nous observons que les candidates et les candidats maitrisent généralement mal ce type d'arguments et nous proposons souvent d'autres pistes, bien plus simples, pour résoudre la question : la personne ne doit pas être surprise et doit accepter de délaisser ses connaissances hors programme pour se tourner vers une autre méthode.

3 Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs courantes.

— Certains exercices demandent de procéder par analyse et synthèse. Dans ce cas, il ne faut pas oublier la synthèse.

— L'utilisation et même la définition de la continuité est souvent mal, voire très mal, maitrisée. Les passages à la limite, dans les fonctions ou les inégalités, sont rarement justifiés.

— Les raisonnements par équivalence sont rarement correctement menés, le symbole $\iff$ étant utilisé comme un raccourci d'écriture. Il n'est pas plus long d'écrire « donc » et de faire la réciproque dans un second temps. Le cas de la résolution des systèmes linéaires est particulier, là encore on observe souvent des lignes qui disparaissent dans des raisonnements par équivalence.

— Les raisonnements avec des équivalents mènent souvent à des sommes ou composotions d'équivalents.

— Dans le cadre d'un raisonnement par récurrence, il faut faire très attention aux quantificateurs à l'intérieur de l'hypothèse de récurrence. Cette année encore, nous avons vu comme hypothèse de récurrence « pour tout $n \in \mathbf{N}$, le degré de P est $2n$ ».

— S'il est commun de ne pas noter les variables de sommations ou d'intégration, ainsi que les bornes au brouillon, il convient de bien les noter au tableau. Cela a poser plusieurs problèmes, notamment en cas d'intégration d'une fonction de plusieurs variables.

— Lorsque des quantités sont définies en fonction de plusieurs ensembles de valeurs d'un paramètre, il faut bien veiller à regarder à quel ensemble appartient le paramètre. Par exemple, si X est une variable aléatoire uniforme dans $\{1, \dots, n\}$ et que l'on somme, sur k, les quantités $\mathbb{P}(X = 2n - k)$, il faut bien distinguer selon que $1 \leq 2n - k \leq n$ ou non, et bien traduire cela en une condition sur k.

— Faire des dessins pose généralement problème. On le demande quasi-systématiquement lorsque l'exercice s'y prête.

— Lorsqu'on demande une étude de fonction, une représentation graphique est attendue. Quelques valeurs stratégiques avec tangentes suffisent généralement à obtenir un très bon graphe.

— Les graphes de certaines fonctions classiques sont parfois complètement inconnus (par exemple celui de $\ln$ cette année).

— Les notations du type $P(X = a \cap Y = b)$ sont quasi-systématiquement utilisées au lieu de $P\big(\{X = a\} \cap \{Y = b\}\big)$.

4 Commentaires planche par planche

Planche 1 du 13/06/22. Le premier exercice étudiait un problème de boîtes tirées uniformément au hasard et contenant chacune le même nombre de boules pouvant avoir deux couleurs dont la distribution des couleurs variait. Aucun·e candidat·e n'a spontanément étudié le cas particulier où les évènements considérés étaient indépendants. La formule de Bayes a toujours bien été appliquée. L'espérance a été obtenue par calcul, personne n'ayant reconnu une loi connue.

Le second exercice cherchait a déterminer les fonctions continues en 0 et satisfaisant la relation $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ pour tout $x, y \in \mathbf{R}$. L'équation a bien été obtenue, ainsi que la valeur en 0. La continuité a souvent été obtenue, avec l'aide du jury dans la majeure partie des cas. On note toutefois des lacunes sévères sur la notion de continuité pour certain·e candidat·es. Des idées pour la dérivabilité ont été proposées. L'expression des fonctions répondant au problème n'a jamais été abordée.

Planche 1 du 14/06/22. Le premier exercice portait sur la modélisation d'une population de bactérie par une loi à densité de support $[0, 1]$. L'intégration de la fonction $t \mapsto 2^{1-t}$ a souvent été laborieuse. La linéarité de l'espérance a été bien utilisée, mais une seule personne a mené le calcul jusqu'au bout.

Dans l'exercice 2, on s'intéressait à l'existence et l'unicité d'une solution $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifiant $YMX = YB$ pour tout vecteur ligne Y. La plupart des candidat·es a pensé à prendre la matrice nulle pour le contre-exemple, mais a eu des difficultés pour formaliser la conclusion. Personne n'a traité *(1b)* de manière autonome. La question *(3)* a été discriminante. Les meilleur·es candidat·es ont développé $\varphi(X + Z)$ dans la dernière question, sans conclure. Une personne a conclut dans le cas $n = 1$, cette initiative a été appréciée.

Planche 2 du 14/06/22. L'exercice 1 étudiait une opération entre deux matrices liée au produit scalaire. Les questions *(2)* et *(3)* nécessitaient la manipulation de sommes multiples, sans complication liée aux bornes. L'interversion de ces sommes a posé problème, plusieurs candidat·es tentant de changer la notation des « variables muettes » sans succès. Certain·es candidat·es ne savait pas exprimer les coefficients d'une matrice produit en général.

L'exercice 2 portait sur la localisation des racines d'une fonction polynomiale h. Les candidat·es ne sont qu'exceptionnellement allé·es au delà de la question *(3)*. On a observé de nombreuses confusions entre les propriétés de h et celle de H.

Planche 1 du 15/06/22. Le premier exercice s'intéressait à la localisation d'une racine d'un polynôme de degré 2 en fonction de ses coefficients. La recherche d'asymptote a été plutôt bien traitée lorsqu'abordée. Pour le domaine de définition, le cas $c < 0$ a posé quelques difficultés. Le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ n'est pas toujours maitrisé. Les candidat·es ayant abordé la question 2 s'en sont plutôt bien sorti·es.

Le second exercice demandait de calculer la loi d'une somme de 2 variables uniformes discrètes. Cela n'a jamais été fait parfaitement; l'expression a éventuellement été obtenue pour les valeurs inférieures à $n + 1$. Un·e candfidat·e a observé que l'expression obtenue était erronée car les probabilités ne sommaient pas à 1. Les autres calculs ont conduit à diverses difficultés et n'ont été bien menés que dans un cas.

Planche 2 du 15/06/22. Le premier exercice portait sur la nature de la série $\sum u_n w_n$ selon les propriétés des suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$. La question *(1)* a été bien traitée par l'ensemble des candidat·es. La reprise de la question a révélé que le « théorème de comparaison » souvent invoqué dans la question *(2)* était mal maitrisé, avec des confusions avec le théorème d'encadrement pour les suites. Seule une personne a traité la question *(3)*, et peu de gens ont spontanément vu le lien entre les questions *(4)* et *(2)*.

L'exercice 2 s'intéressait à l'ensemble des matrices commutant avec une matrice donnée. D'importantes difficultés à manipuler le produit matriciel sont apparues chez plusieurs candidat·es. Même quand les produits MA et AM étaient correctement calculés, les conclusions étaient lacunaires, les candidat·es ne remarquant pas que les conditions d'égalité ne portaient pas sur tous les coefficients. La question *(3b)* a été bien réussie, une seule personne a attaqué *(2b)* et *(3c)*.

Planche 1 du 18/06/22. Dans le premier exercice, on établissait une propriété de la fonction $\ln$ et on donnait une application. Personne n'est allé au delà de l'initialisation de la récurrence dans la question *(1)* ; quelques candidat·es on appliqué la propriété $\mathbf{P}$ sans en vérifier les hypothèses. Dans la question *(2)*, l'utilisation de la continuité du logarithme pour justifier la limite en 0 n'a jamais été mentionnée, et a posé des difficultés en reprise. Les candidat·es ont avancé dans la question *(4)*, avec plus ou moins d'aide.

Dans le deuxième exercice, on tirait un réel de manière uniforme dans un intervalle lui-même obtenu aléatoirement. Les candidat·es ont généralement correctement appliqué la formule des probabilités totale, puis ont systématiquement proposé une fonction de répartition qui dépendait de la variable de sommation. Plusieurs ce sont obstinés sur cette piste malgré les indications du jury. Nous avons par exemple demandé de tracer la fonction de répartition, ou si cette fonction de répartition était aléatoire, et avons obtenu des réponses fantaisistes ; des valeurs prises en dehors de $[0, 1]$ ou des décroissances n'ont pas toujours inquiété les candidat·es. La question *(2)* a été légèrement mieux réussie, surtout la *(2b)*, où le calcul a souvent bien été mené.

Planche 2 du 18/06/22. Dans l'exercice d'algèbre linéaire, on s'intéressait à la probabilité qu'une matrice dont les colonnes sont tirées aléatoirement dans une famille finie soit inversible. Deux candidat·es ont affirmé que la famille $(u + v, u + w, v + w)$ était de toute évidence génératrice. Le lien entre D et I a été bien compris. Plusieurs personnes ont proposé des pistes dans la dernière question, souvent avec des imprécisions dans le dénombrement liées à la non prise en compte de l'ordre des colonnes. Cet exercice a mis en lumière des difficultés calculatoires dans les simplifications de fraction et l'obtention des valeurs des coefficients binomiaux simples.

Le deuxième exercice portait sur l'étude d'une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. La question *(1a)* a toujours été traitée, la *(1b)* jamais de façon complète. Deux personnes ont utilisé des résultats d'algèbre linéaire en *(1c)*, présumant que L était linéaire. Deux candidat·es ont traité *(2a)* correctement durant leur restitution, et ont compris la difficulté pour retirer les valeurs absolues dans *(2b)*.

Planche 1 du 21/06/22. Le premier exercice proposait de déterminer une condition nécessaire et suffisante à l'inversibilité d'une matrice à paramètres. La première question n'a posé aucune difficulté. Pour les suivantes, l'indication n'a pas souvent été bien utilisée. Le produit matriciel en général n'étant pas toujours bien maitrisé, la question *(4)* n'a pas été réussie.

Le second exercice proposait un mélange de deux gaussiennes. La question *(1)* a été à peu près convenablement traitée dans 2 cas. Les quelques candidat·es ayant obtenu la densité de la variable aléatoire n'ont pas été en mesure de donner un tracé convenable. Des fonctions évidemment fausses ont été proposées pour la densité ou la fonction de densité. Pour le calcul de variance, les candidat·es préfèrent souvent chercher une formule du cours plutôt que de faire un calcul ; ainsi $\mathbb{E}[Y(1-Y)]$ a donné lieu a divers résultats.

Planche 1 du 23/06/22. Le premier exercice proposait l'étude d'un vecteur définit par récurrence. En *(1)*, la vérification que les proportions appartenaient à $[0,1]$ a souvent été oubliée. La question *(4)* a semblé déstabiliser les candidat·es qui se sont souvent perdu·es dans des justifications inappropriées ou se sont lancé dans un calcul faux. La question *(5)* a peu été abordée lors de la restitution et la *(6)* encore moins.

Dans le second exercice, la première question a bien été traitée dans l'ensemble. La question *(2)* n'a jamais été abordée et la question *(3)* a posé des difficultés notamment sur la variable d'intégration.

Planche 2 du 23/06/22. Dans le premier exercice, on cherchait à quantifier la distance entre les solutions d'un problème de type $AX = Y$ en fonction de la variation de Y. La question *(1)* a généralement bien été traitée, l'interprétation de *(1c)* ayant causé plus de perplexité. La question *(2a)* a peu été convenablement abordée et quelques pistes ont été données pour la *(2b)*, qui a pu être abordée lors de la reprise. La *(2c)* n'a pas été faite.

Le second exercice cherchait la limite de $(1-\frac{1}{n})^n$ puis un équivalent de $(1-\frac{1}{n})^{n^2}$. L'aspect probabiliste de l'exercice n'a pas posé de grandes difficultés mais les équivalents de ces quantités ont été très laborieux à obtenir, surtout le second, certain·es candidat·es proposant diverses solutions en espérant que le jury en accepte une.

Planche 1 du 24/06/22. Dans le premier exercice, on calculait diverses probabilités sur une matrice 2×2 ayant des coefficients uniformes. On a observé des confusions entre l'intersection et le conditionnement. Le calcul de $P(XZ = 0)$ a également été source d'erreurs, les candidat·es appliquant souvent une formule supposant les évènements $\{X = 0\}$ et $\{Z = 0\}$ incompatibles. Lorsque traitées, les deux dernière questions l'ont bien été.

Le second exercice s'intéressait à une fonction définie à l'aide d'un paramètre. L'intuition était souvent bonne mais rares ont été les candidat·es capables de justifier seul·es convenablement l'absence de limite pour une valeur de α convenable en *(1c)*. L'application du théorème des accroissement finis n'a pas toujours été vue. La justification de $x_n \to \infty$ a rarement été donnée.

Planche 1 du 25/06/22. Le premier exercice portait sur le nombre de parties d'échecs jouées avant qu'un joueur gagne, dans le cas où il est possible de faire un match nul. Les 4 premières questions ont été en général bien traitées, avec une bonne application de la formule des probabilités totales. Certaines personnes ont fini l'exercice.

Le second exercice portait sur l'étude d'un ensemble défini comme un hyperplan. La notion de sous-espace vectoriel était correctement maitrisée. Plusieurs personnes ont cherché à construire une base de F, parfois avec succès. Pour la projection, la technique générale était rarement connues, ce qui n'a pas empêché plusieurs personnes d'avancer correctement dans cette question.

Planche 2 du 25/06/22. Le premier exercice portait sur les polynômes positifs. Les trois premières questions ont montrées que l'intuition sur les fonctions polynomiales est souvent limitée. On a par exemple proposé de donner l'allure d'un polynôme de degré trois, ce qui fut souvent problématique. Avec de l'aide, la plupart des personnes sont allées jusqu'à la question *(3b)*; la suite fut peu traitée.

Le second exercice portait sur les matrices de la forme $\sum_{i=1}^{n} X_i X_i^T$ où les X_i sont des matrices colonnes. La première question a souvent posé problème, les personnes interrogées n'ayant pas forcément vu que les colonnes étaient proportionnelles, ou ayant eu du mal à la formaliser. La suite de l'exercice fut rarement abordée dans le cas général.