Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\textit{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Deux personnes s'affrontent aux échecs. La joueuse A a une probabilité p de l'emporter, le joueur B a une probabilité q de l'emporter, et il y a match nul avec probabilité $r = 1 - p - q$. En cas de match nul, une nouvelle partie est jouée immédiatement, et ce jusqu'à ce que l'une des personnes gagne. Les parties sont mutuellement indépendantes. On note N le nombre de parties jouées.

(1) Quelle est la loi de N ?

(2) Le jeu se termine au bout d'une seule partie. Quelle est la probabilité que la joueuse A ait gagné ?

(3) Quelle est la probabilité que la joueuse A gagne, sans considération du nombre de parties jouées avant la victoire ?

On suppose à présent que les probabilités de victoires et de match nul varient avec le temps. À la n-ème partie, on note p_n la probabilité de victoire de la joueuse A, q_n celle du joueur B, et $r_n = 1 - p_n - q_n$ la probabilité de match nul.

(4) Calculer la probabilité que la joueuse A gagne sachant qu'il y a eu exactement k parties. Qu'observe-t-on ?

(5) On suppose qu'il existe $\delta < 1$ tel que, pour tout n, on ait $r_n \leq \delta$. Montrer que le jeu s'arrête au bout d'un temps fini.

(6) On suppose que $r_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 2$, on a $r_n = 1 - \frac{1}{n^2}$. Montrer que $\mathbb{P}(N > k) \to \frac{1}{2}$ lorsque $k \to \infty$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère l'ensemble

$$F = \left\{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n} \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\right\}$$

et le sous-espace vectoriel G de $\mathbf{R}^{2n}$ engendré par le vecteur $u = (1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)$.

(1) *(1a)* Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{2n}$.

(1b) Calculer sa dimension.

(2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^{2n}$.

(3) Soit $x \in \mathbf{R}^{2n}$.

(3a) Donner le projeté de x sur F parallèlement à G.

(3b) Donner le symétrique de x par rapport à F le long de G.