*Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.*

*Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

*Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.*

⋆⋆⋆

*Exercice 1.* On modélise la propagation d'une fausse information (infox), jour après jour, de la manière suivante. Au $k$-ième jour, on note $p_k$ la proportion de gens ne croyant pas à l'infox, $c_k$ la proportion de gens y croyant, et $h_k$ la proportion d'hésitants. Initialement, ces proportions appartiennent à $[0,1]$ et vérifient $p_0 + c_0 + h_0 = 1$. Chaque jour,

— $\frac{1}{4}$ des gens ne croyant pas à l'infox et $\frac{3}{4}$ des gens y croyant se mettent à hésiter ; les autres maintiennent leur opinion.

— $\frac{1}{2}$ des hésitants décident de ne pas y croire, $\frac{1}{4}$ d'y croire, et le quart restant continue à hésiter.

Il est possible de changer d'avis plusieurs fois de suite. Ainsi, on a

$$p_{k+1} = \frac{3}{4}p_k + \frac{1}{2}h_k\,; \qquad c_{k+1} = \frac{1}{4}c_k + \frac{1}{4}h_k\,; \qquad h_{k+1} = \frac{1}{4}p_k + \frac{3}{4}c_k + \frac{1}{4}h_k\,.$$

On introduit les notations suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour } k \in \mathbf{N}, \quad Y_k = \begin{pmatrix} p_k \\ c_k \\ h_k \end{pmatrix}.$$

*(1)* Vérifier que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $p_k \in [0,1]$, $c_k \in [0,1]$, $h_k \in [0,1]$, et $p_k + c_k + h_k = 1$.

*(2)* Montrer que $Y_{k+1} = \frac{1}{4}AY_k$.

*(3)* Calculer $Au$, $Av$ et $Aw$. Que peut-on en déduire sur la matrice $A$ ?

*(4)* Montrer qu'il existe $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois réels tels que $Y_0 = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

*(5)* Déterminer la limite de $c_k$ lorsque $k \to +\infty$ en fonction de $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.

*(6)* Montrer que $\alpha$ ne dépend pas du choix de $Y_0$.

⋆⋆⋆

*Exercice 2.* Soit $h$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

*(1)* Montrer que pour tous réels $x$ et $y$, on a $h(y) = h(x) + (y-x)h'(x) + \displaystyle\int_x^y (y-t)h''(t)\mathrm{d}t$.

*(2)* Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $h''(x) > 0$. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall y \in [x-a, x+a], \quad \int_x^y (y-t)h''(t)\mathrm{d}t > 0\,.$$

*(3)* Montrer que $h$ vérifie la propriété

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall a > 0,\ h(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} h(y)\mathrm{d}y$$

si et seulement si $h$ est une fonction affine.