Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soient (u, v, w) une base de $\mathbf{R}^3$.

(1) Montrer que $(u+v, u+w, v+w)$ est aussi une base de $\mathbf{R}^3$.

On construit une matrice aléatoire de la manière suivante : chacune de ses colonnes est choisie uniformément au hasard parmi les vecteurs u, v, w, $u+v$, $u+w$, $v+w$. Les trois choix sont mutuellement indépendants et il est possible de choisir plusieurs fois le même vecteur. On considère les deux évènements

— D : « on a tiré trois colonnes différentes » ;

— I : « la matrice obtenue est inversible ».

(2) Calculer $\mathbb{P}(D)$ et en déduire une majoration de $\mathbb{P}(I)$.

(3) Calculer $\mathbb{P}(D \mid I)$ et $\mathbb{P}(I \mid D)$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier. On introduit la fonction $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ définie par

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n e^{x_j}} \left(e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_n}\right).$$

(1) *(1a)* Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$L(x_1 + \lambda, \ldots, x_n + \lambda) = L(x_1, \ldots, x_n).$$

(1b) Soit y_1, …, y_n des réels strictement positifs, tels que $\sum_{j=1}^n y_j = 1$. Montrer qu'il existe un unique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ et

$$L(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n).$$

On pourra introduire $S = \sum_{j=1}^n e^{x_j}$ et commencer par déterminer la valeur de S.

(1c) La fonction L est-elle injective ? Surjective ?

(2) On suppose désormais $n = 2$.

(2a) Pour $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, on note $(y_1, y_2) = L(x_1, x_2)$. Montrer que, si $x_1 \neq x_2$,

$$|y_2 - y_1| < |x_2 - x_1|.$$

(2b) Soit $0 < a < 1$. On définit une suite par $a_0 = a$ et, pour tout $k \geq 1$, $L(a_{k-1}, 1 - a_{k-1}) = (a_k, 1 - a_k)$. Justifier que cela définit bien la suite de manière unique, puis montrer que cette suite converge.