Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à coefficients positifs ou nuls. On s'intéresse à la série $\sum u_n w_n$. *Les questions sont indépendantes : les hypothèses données dans une question sont valables* ***uniquement dans cette question****.*

(1) On prend $u_n = \frac{1}{n^3}$. Donner un exemple de suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum u_n w_n$ converge, et un exemple où cette série diverge.

(2) On suppose que la série $\sum u_n$ converge et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Montrer que la série $\sum u_n w_n$ converge.

(3) On suppose que pour toute suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la série $\sum u_n w_n$ converge. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.

(4) On suppose que $\sum u_n$ converge. Que se passe t-il lorsque, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n = u_n$?

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée fixée. On s'intéresse à

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R}) \ \text{ telles que } \ MA = AM \right\}.$$

(1) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$.

(2) *(2a)* Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont coefficient sur la ligne i et la colonne j vaut 1 et tous les autres valent 0. Déterminer $\mathcal{C}(E_{i,j})$.

(2b) Déterminer $\bigcap_{A\in\mathbf{M}_n(\mathbf{R})} \mathcal{C}(A)$.

(3) Pour $1 \leq k \leq n$ on note I_k la matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$(I_k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(3a) Déterminer $\mathcal{C}(I_k)$.

(3b) Soit P une matrice inversible. Montrer que M appartient à $\mathcal{C}(A)$ si et seulement si $P^{-1}MP$ appartient à $\mathcal{C}(P^{-1}AP)$.

(3c) Supposons que A est la matrice d'un projecteur. Déterminer $\mathcal{C}(A)$.