Rapport du jury de l'épreuve orale de mathématiques Ulm/Lyon, filière PC, concours 2018

Guillaume AUBRUN, Oriane BLONDEL, Louis DUPAIGNE, Emmanuel GRENIER

Coefficients (en pourcentage du total d'admission) : Ulm 17,1% - Lyon 7,0%

1 Commentaires généraux

L'épreuve orale de mathématiques Ulm/Lyon s'est déroulée dans les locaux de l'ENS Lyon, entre le 19 juin et le 12 juillet 2018. Il s'agit d'une épreuve de 45 minutes, sans préparation. Il y a eu 248 candidats présents.

Les interrogations ont été de forme variée. Parfois, une seule question, à l'énoncé très simple mais à la solution élaborée, suffit pour occuper le candidat pendant l'intégralité de l'épreuve. A l'inverse, certaines planches étaient formées d'une succession de questions plus élémentaires.

La discussion avec le candidat permet à l'examinateur de s'assurer que le candidat a bien assimilé son cours, mais aussi d'évaluer sa capacité d'adaptation devant un problème avec lequel il n'est pas familier. Certains énoncés étaient volontairement rédigés de manière déroutante. Le jury a évité d'interroger les candidats sur les notions qui ne sont pas au programme de PCSI/PC.

Le jury a été particulièrement surpris par la grande hétérogénéité de niveau des candidats : plusieurs candidats excellents, à l'intuition mathématique remarquable, côtoient de nombreux élèves présentant des lacunes graves. Certaines parties du programme semblent moins bien assimilées. Voici par exemple une liste de faiblesses révélées chez plusieurs candidats

— L'usage des quantificateurs, dans la définition d'une limite ou dans une preuve par l'absurde, n'est pas toujours maitrisé.

— Dans le même ordre d'idée, le jury rappelle que majorer une fonction $f_n \in C([0,1])$ par son maximum ne permet pas de dominer la suite (f_n). Ecrire $f_n(x) = f(x) + o(1)$ avec $|o(1)| \leq 1$ à partir d'un certain rang non plus.

— Les connaissances ne sont pas toujours au rendez-vous : des candidats ignorent la définition précise du plan tangent à une surface, la formule des probabilités totales ou encore la classification des isométries vectorielles du plan. Certains même n'ont manifestement pas assimilé les notions d'événement et de variable aléatoire.

— Plusieurs candidats restent pantois devant l'énoncé proposé et ne font preuve d'aucune initiative. Une telle passivité a été sanctionnée. Même sur un exercice difficile, il est toujours possible de prendre des initiatives : faire un dessin, s'intéresser à des cas particuliers. Par exemple, pour un exercice traitant de dénombrement, on peut toujours commencer par étudier des cas explicites simples.

— En cas de question ouverte, il peut être utile de s'appuyer sur son intuition pour deviner la propriété à démontrer. En revanche, les convictions personnelles ("pour moi...") n'ont pas force de preuve.

— Des candidats se laissent déstabiliser par des questions très simples ; même si la conclusion est juste, il est inquiétant de devoir passer 10 minutes à se convaincre qu'une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

Néanmoins, le jury tient à préciser que le niveau d'ensemble du concours reste excellent, et a été impressionné par une poignée de candidats exceptionnels.

2 Quelques exercices posés

Exercice 1

1. Soit $u, v \in C^1(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$. On suppose que $u \geq v$ avec égalité en un point. Montrer que les graphes de u et de v ont même plan tangent en ce point.
2. Soit $u \in C^2(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$. On fixe un point P sur son graphe $\mathcal{G}$. Montrer qu'il existe une sphère touchant $\mathcal{G}$ au point P et incluse dans l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ z \leq u(x, y)\}$.

Exercice 2

Pour $x \in \mathbf{R}^n$, on note

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

1. Déterminer toutes les matrices orthogonales $A \in O(n)$ qui vérifient $\|Ax\|_\infty = \|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.
2. Déterminer toutes les matrices $A \in M_n$ qui vérifient $\|Ax\|_\infty = \|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.

Exercice 3

Soit $n \geqslant 2$ entier. On considère une boîte contenant n boules numérotées de 1 à n. On vide la boîte selon la procédure suivante : on tire une boule uniformément au hasard, puis on lit son numéro k et on retire toutes les boules de numéro dans $\{k, k+1, \ldots, n\}$. On recommence jusqu'à ce que la boîte soit vide. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider la boîte.

1. Calculer $\mathbf{P}(X_n = 1)$, $\mathbf{P}(X_n = n)$.
2. Montrer que pour $j \geqslant 2$, $\mathbf{P}(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_k = j-1) = \frac{n-1}{n} \mathbf{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \mathbf{P}(X_{n-1} = j-1)$.
3. Soient $T_1, \ldots, T_n$ des variables de Bernoulli indépendantes de paramètres $1, 2^{-1}, \ldots, n^{-1}$. Montrer que X_n a même loi que $\sum_{k=1}^n T_k$, où $T_1, \ldots, T_n$ sont des variables de Bernoulli indépendantes.
4. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbf{P}(|\frac{X_n}{\ln n} - 1| > \epsilon) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.