

Concours ENS SIS 2013
Physique
Interféromètre de Michelson

Le problème se décompose en trois parties non-indépendantes : une introduction générale sur les interférences créées par deux sources ponctuelles cohérentes dans une configuration particulière (partie 1), l'utilisation de l'interféromètre de Michelson pour la spectroscopie (partie 2) et la conception d'un lambdamètre (partie 3).

De manière générale, une source lumineuse ponctuelle située en S émet, de manière pulsée, des trains d'ondes lumineuses supposées de même pulsation ω . En représentation scalaire, l'onde lumineuse monochromatique est alors caractérisée en un point M à l'instant t par le champ électrique $E(M, t) = a \cos[\omega t - \phi(M, t)]$, où a est l'amplitude supposée constante de l'onde et $\phi(M, t)$ le déphasage en M à l'instant t par rapport au point de référence S . La grandeur complexe associée à $E(M, t)$ est : $\underline{E}(M, t) = a \exp[i(\omega t - \phi(M, t))]$, où $i^2 = -1$.

Le modèle de train d'onde suppose que la phase à la source ϕ_S reste constante pendant des intervalles de temps de durée constante τ_C entre lesquelles elle change aléatoirement de valeur. L'onde émise pendant cet intervalle de temps appelé temps de cohérence est nommée "train d'onde". Le train d'onde est ainsi limité dans le temps et se propage dans le vide à la vitesse $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. Ce temps de cohérence est la durée moyenne de passage des trains d'ondes en un point donné de l'espace. La phase de l'onde ϕ_S à la source prend une nouvelle valeur aléatoire à chaque nouveau train d'onde.

Dans la suite, l'éclairement (ou intensité lumineuse) $I(M)$ est mesuré par un détecteur placé en M sensible à la valeur moyenne temporelle de $E^2(M, t)$. L'éclairement est conventionnellement défini (à une constante multiplicative près) par :

$$I(M) = \langle \underline{E}(M, t) \underline{E}^*(M, t) \rangle = \langle |\underline{E}(M, t)|^2 \rangle.$$

1 Préambule : figure d'interférences créées par deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes

Deux sources lumineuses ponctuelles cohérentes S_1 et S_2 émettent dans le vide deux ondes monochromatiques de même longueur d'onde λ_0 , de même amplitude a_0 et en phase en leurs origines respectives S_1 et S_2 . Ces sources distantes de b sont symétriques par rapport à C (cf. Figure 1).

Un écran (E) d'observation est placé perpendiculairement à la droite reliant les sources S_1 et S_2 , et situé à une distance D du point C entre les deux sources. La droite normale à l'écran passant par C définit l'axe du système et cet axe coupe l'écran en B . Les sources sont dans le plan (BXZ) . Le point M d'observation dans le repère $(BXYZ)$ est défini par $\rho = BM$, avec $D \gg b$ et $D \gg \rho$. L'éclairement obtenu sur l'écran en occultant l'une des deux sources est noté $I_0 = a_0^2$.

1. Comment réalise-t-on de telles sources ?
2. Donner l'éclairement $I(M)$ au point M en fonction de la différence de marche $\delta(M) = (S_1M) - (S_2M)$, λ_0 et I_0 .

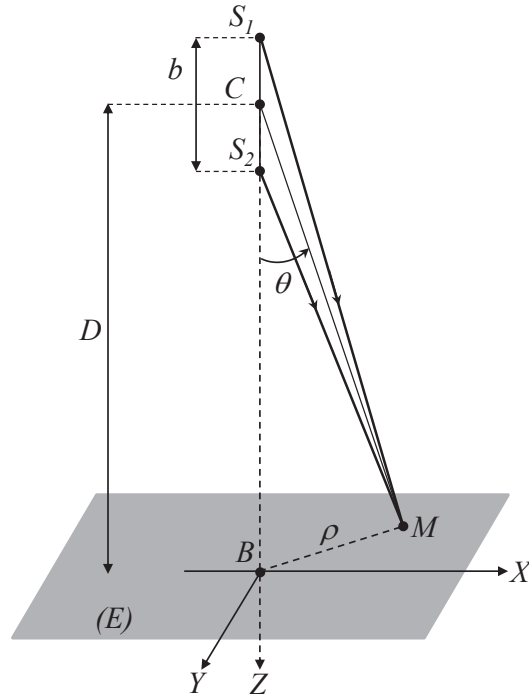


FIGURE 1 –

3. Expliciter l'expression de la différence de marche $\delta(M)$ en fonction de b et de l'angle $\theta = (\vec{CB}, \vec{CM})$.
4. En déduire l'éclairement $I(M)$ au point M en fonction de θ , b , λ_0 et I_0 ; puis en fonction de ρ , D , b , λ_0 et I_0 .
5. Quelle est la forme des franges d'interférences observées ?
6. Définir l'ordre d'interférences $p(M)$ au point M . Est-il croissant ou décroissant à partir du centre B ?

2 L'interféromètre de Michelson : un outil pour la spectroscopie

La figure 2 correspond au schéma de principe de l'interféromètre de Michelson. Les miroirs sont réglés de telle sorte que sont observés des anneaux d'interférence circulaires sur le plan d'observation (E) situé dans le plan focal d'une lentille convergente (L) (configuration en "lame d'air" de l'interféromètre de Michelson). La distance focale de la lentille est notée f' et son axe Oz coupe l'écran en B . On pose $OB = D$.

L'interféromètre est constitué :

- d'une lame semi-réfléchissante (S_P) qui réfléchit la moitié de la lumière reçue ; l'origine O du repère $(Oxyz)$ est centré sur la séparatrice qui fait un angle fixe de $\pi/4$ avec les axes Ox et Oz . Les déphasages introduits par la séparatrice sont compensés par une lame compensatrice (non représentée sur la figure) réglée parallèlement à la séparatrice.
- de deux miroirs plans (M_1) et (M_2), perpendiculaires au plan de la figure et dont les orientations fixes font un angle $\pi/4$ avec la séparatrice (S_P). Le miroir (M_1) est susceptible d'être translaté dans la direction Oz alors que le miroir (M_2) reste fixe. La distance qui sépare le miroir (M_2) de l'origine O est notée L_0 .

Seules seront considérées des ondes ayant été réfléchies une et une seule fois sur la lame séparatrice. A partir de la situation de référence où l'image de (M_2) par rapport à la séparatrice (S_P) est confondue avec (M_1) , le miroir (M_1) est translaté d'une longueur e comptée positivement si le miroir s'éloigne de la séparatrice.

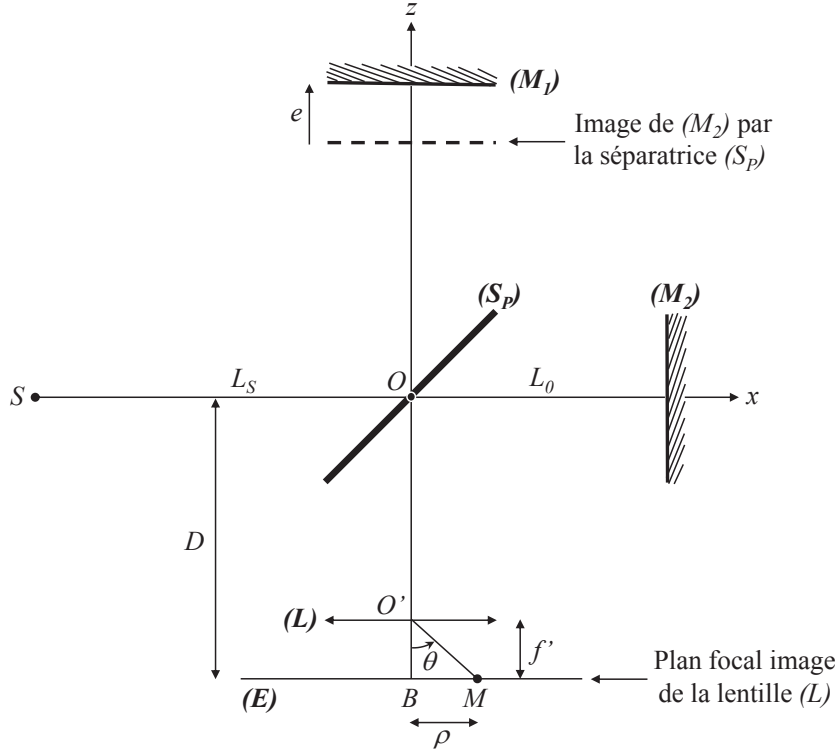


FIGURE 2 – Schéma de principe d'un interféromètre de Michelson en configuration de "lame d'air".

2.1 Anneaux d'égale inclinaison

La source ponctuelle S monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , est placée à la distance finie $L_S = SO$ de la séparatrice. Le système optique constitué de (S_P) , (M_1) et (M_2) donne deux images S_1 et S_2 de la source S : S_1 correspond aux rayons qui rencontrent (M_1) et S_2 aux rayons qui rencontrent (M_2) . L'éclairement obtenu sur l'écran en occultant l'une des deux sources est noté I_0 .

1. Par des raisonnements de symétrie, placer sur un schéma les sources secondaires S_1 et S_2 , images de la source S , et préciser leurs coordonnées dans le repère Oxz . En déduire l'expression de $\overrightarrow{S_1 S_2}$ en fonction de e .
2. La distance qui sépare les points M et B sur l'écran (E) est notée $\rho = BM$. Avec la condition $\rho \ll f'$, exprimer la différence de marche $\delta(M)$ (définie ici comme une grandeur positive) en fonction de e et de l'angle $\theta = (\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'M})$; puis en fonction de ρ , e , et f' . Déterminer, en fonction de e , la différence de marche $\Delta = \delta(B)$ obtenue en B pour $\rho = 0$.
3. Exprimer l'éclairement $I(M)$ obtenu au point M en fonction de ρ , e , f' , λ_0 et I_0 . En déduire la figure d'interférences projetée sur (E) .
4. Le centre B des anneaux correspond à un maximum d'intensité. Quel est l'ordre d'interférence p_0 , supposé entier, au centre des anneaux ? Donner l'expression du rayon ρ_k du $k^{\text{ième}}$ anneau brillant compté à partir du centre en fonction de f' , p_0 et de son ordre d'interférence p_k .
5. Déterminer ρ_k en fonction de k et de ρ_1 , le rayon du premier anneau compté à partir du centre. Commenter la figure d'interférences.

- Décrire, en le justifiant, l'évolution des anneaux lorsque la valeur de l'épaisseur e de la lame d'air est progressivement augmentée. Les anneaux semblent-ils "entrer" ou "sortir" du centre ? Y a-t-il un nombre croissant ou décroissant d'anneaux visibles sur l'écran ?

2.2 Interférogrammes : cas d'une lumière monochromatique

Le miroir (M_1) est mobile entre $e = 0$ et $e = L_{\max}$ ($L_{\max} > 0$). Un détecteur ponctuel est placé au centre B du système d'anneaux. Il délivre un signal électrique proportionnel à l'éclairement qu'il reçoit et dépendant de la différence de marche Δ . L'accroissement de e entraîne une variation du chemin optique en B de $\Delta = 0$ à $\Delta = \Delta_{\max}$ et, par conséquent, un défilement des anneaux. On appelle interférogramme $I(\Delta)$ l'enregistrement de l'évolution de l'éclairement I en fonction de Δ .

L'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde λ_0 . Exprimer l'éclairement $I(\Delta)$ et représenter graphiquement l'interférogramme $I(\Delta)$ en fonction de Δ en indiquant ses paramètres caractéristiques.

2.3 Interférogrammes : cas d'une lumière non-monochromatique

2.3.1 Doublet du sodium

On place en S une lampe à vapeur de sodium émettant avec la même intensité deux ondes monochromatiques de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 voisines de la longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$, avec $\delta\lambda = (\lambda_2 - \lambda_1) \ll \lambda_0$.

- Déterminer l'éclairement $I(\Delta)$ et montrer que son expression diffère de l'éclairement précédent par le facteur $\gamma(\Delta)$ appelé degré de cohérence temporelle qui sera explicité.
- Définir et calculer le contraste des franges d'interférence $C(\Delta)$.
- Représenter graphiquement $I(\Delta)$ en fonction de Δ , en indiquant les paramètres caractéristiques de l'interférogramme. A quelle période Δ_0 observe-t-on un brouillage des franges ? Relier cette période à λ_0 et $\delta\lambda$.
- On mesure en pratique une période $\Delta_0 = 0,58$ mm. Sachant que le doublet du sodium est centré sur $\lambda_0 = 589$ nm, calculer $\delta\lambda$. Conclure sur l'intérêt de ce montage interférométrique.

2.3.2 Source de profil spectral Gaussien

On place cette fois en S une source quasi-monochromatique, caractérisée par un profil spectral Gaussien :

$$\frac{dI}{d\sigma} = g(\sigma) = \frac{I_0}{W\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{W^2}\right) \quad (1)$$

où $\sigma = \frac{1}{\lambda}$, et σ_0 et $W \ll \sigma_0$ sont des constantes positives. Dans la suite de l'énoncé, on suppose que l'on peut étendre g aux valeurs négatives de σ .

- Établir l'expression de l'éclairement $I(\Delta)$ en fonction de Δ et des données du problème. On introduira la fonction $\tilde{g}(x)$, transformée de Fourier de $g(\sigma)$, définie par :

$$\tilde{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma) \exp(2i\pi\sigma x) d\sigma \quad (2)$$

- On donne le résultat suivant :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{a^2}\right) \exp(2i\pi ux) du = a\sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 a^2 x^2) \quad (3)$$

Calculer $I(\Delta)$ et donner l'expression du degré de cohérence temporelle $\gamma(\Delta)$.

- Tracer l'allure de $I(\Delta)$ en fonction de Δ en sachant que $\delta\sigma \ll \sigma_0$ et indiquer les paramètres caractéristiques de l'interférogramme.

4. On admet que les franges d'interférences restent bien contrastées jusqu'à Δ_C , différence de marche correspondant à la moitié du contraste maximal, c'est à dire tant que Δ vérifie la relation : $|\Delta| \leq \Delta_C$. Exprimer Δ_C en fonction de W , puis en fonction de λ_0 et $\delta\lambda$.
5. Δ_C est appelé longueur de cohérence. Préciser la signification physique de Δ_C et commenter la condition d'interférences $|\Delta| \leq \Delta_C$.
6. L'interféromètre de Michelson est éclairé par une lampe basse pression de longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = 600$ nm et de largeur de raie $\delta\lambda = 10^{-2}$ nm. Évaluer sa longueur de cohérence. Répondre à cette même question dans le cas d'un laser de longueur d'onde $\lambda_0 = 600$ nm et dont la largeur de raie vaut $\delta\lambda = 10^{-6}$ nm. Commenter.

2.4 Analyse spectrale d'interférogrammes

L'analyse spectrale des interférogrammes repose sur le calcul de la transformée de Fourier $\mathcal{I}(\omega)$ de l'éclairement $I(\Delta)$, définie par :

$$\mathcal{I}(\omega) = \int_0^{\Delta_{\max}} I(\Delta) \cos\left(\frac{\omega\Delta}{c}\right) d\Delta$$

1. Calculer $\mathcal{I}(\omega)$ dans le cas d'une source idéale monochromatique de pulsation ω_0 .
2. Représenter l'allure de la courbe $\mathcal{I}(\omega)$ en précisant :
 - les amplitudes en fonction de I_0 et Δ_{\max} ;
 - les largeurs des bases $\delta\omega_{base}$ (cf. Figure 3) en fonction de Δ_{\max} et c .

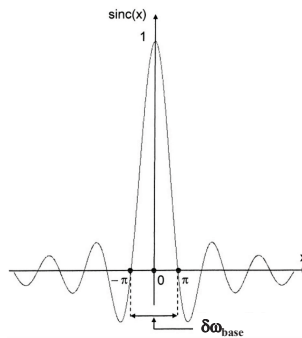


FIGURE 3 – Largeur de base dans le cas de la fonction $\text{sinc}(x)$.

3. Que devient $\mathcal{I}(\omega)$ quand Δ_{\max} devient très grand ?
4. En déduire, sans calcul, l'allure de la courbe $\mathcal{I}(\omega)$ pour une source émettant deux ondes de pulsations ω_1 et ω_2 voisines de la pulsation moyenne ω_0 et de même intensité ($\omega_2 > \omega_1$).

En spectroscopie, un spectromètre a pour fonction de séparer deux radiations de pulsations voisines ω_1 et ω_2 , ce qui dépend du pouvoir de résolution de l'appareil. Le critère adopté pour évaluer l'ordre de grandeur de la limite de résolution d'un spectromètre est le critère de Rayleigh : le plus petit écart mesurable est obtenu lorsque deux pics de deux radiations différentes sont distants d'une demi-largeur de base, c'est à dire lorsque le maximum principal de l'un correspond à la première annulation de l'autre.

5. Estimer le plus petit écart spectral $\Delta\omega_R = \omega_2 - \omega_1$ observable par ce dispositif en fonction de c et Δ_{\max} .
6. Le pouvoir de résolution \mathcal{R} du spectromètre est défini par $\mathcal{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_R}$. Montrer que \mathcal{R} est fixé par le nombre N_{\max} de maxima d'intensité enregistrés par le détecteur lors de la course finie de l'interféromètre. Commenter.

3 Double interféromètre de Michelson : le lambdamètre

Un lambdamètre (cf. Figure 4) permet de mesurer rapidement la longueur d'onde d'un laser stabilisé. Il se présente comme un double interféromètre de Michelson qui compare la longueur d'onde inconnue d'un laser stabilisé avec la longueur d'onde connue d'un laser de référence. Le lambdamètre ne nécessite qu'une séparatrice (S_P), deux coins de cube identiques et un miroir réglable (M). Tous les angles de réflexion sont égaux à $\pi/4$.

Les "coins de cube" sont des réflecteurs qui ont la propriété de renvoyer la lumière dans la même direction que celle de réception. Ils sont en verre d'indice $n = 1.5$ et les trois angles au sommet font chacun 90° avec une précision meilleure que la seconde d'arc. Un rayon lumineux tombant sur une des trois faces du coin se réfléchit trois fois successivement et se décale donc faiblement en position pour ressortir parallèlement à sa direction incidente.

Le coin de cube 2 est mobile et il se déplace dans une enceinte où le vide est réalisé. Il est suffisamment lourd pour rendre les frottements négligeables lors de la translation. Il est attaché à une poulie d'un moteur pas à pas par l'intermédiaire d'un fil et guidé dans un tube en inox. Les concepteurs ont cherché à se rapprocher le plus de la chute libre.

Les longueurs de cohérence du laser de référence (laser Hélium-Néon émettant à 632.8 nm) et du laser stabilisé de longueur d'onde inconnue (laser CO₂) sont respectivement de l'ordre de 300 m et 30 km.

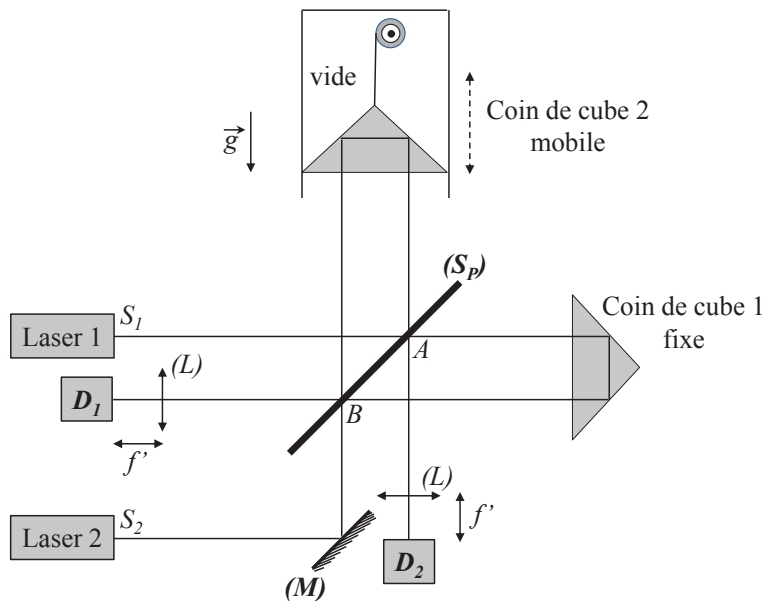


FIGURE 4 – Schéma de principe d'un lambdamètre.

1. Le rayon issu du Laser 1 arrive en A sur la lame semi-réfléchissante et l'anneau central de figure d'interférences est détecté par la photodiode (D_1). De même, le rayon issu du Laser 2 arrive en B sur la lame et l'anneau central de la figure d'interférences est détecté sur la photodiode (D_2). Comparer les différences de marche pour le Laser 1 et le Laser 2 respectivement aux centres (D_1) et (D_2) des deux figures d'interférences.
2. Le Laser 1 est le laser de référence de longueur d'onde $\lambda_1 = 632.8$ nm. Le Laser 2 est un laser CO₂ stabilisé dont la longueur d'onde λ_2 est à mesurer. Lors de la chute du coin de cube 2, un compteur relié aux deux photodiodes évalue à $p_1 = 3160556$ le nombre de scintillements détectés par (D_1), et dans le même temps, $p_2 = 188679$ scintillements sont détectés par (D_2). Évaluer λ_2 .

3. Calculer la hauteur de chute e du coin de cube mobile. Comparer à la longueur de cohérence des lasers et commenter.
4. Déterminer la durée de la chute supposée libre du coin de cube. Commenter.
5. Le comptage des franges s'effectue à la frange près. En considérant que la longueur d'onde de référence λ_1 est connue sans incertitude, indiquer l'incertitude relative sur l'évaluation de λ_2 . Commenter.