U282

SESSION 2008

SECOND CONCOURS
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PHYSIQUE – MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, sans imprimante et sans document d'accompagnement est autorisé.
Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail.
Aucun échange n'est permis entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

Quelques modèles mécaniques de la jambe

durée : 4 heures

Nous étudions dans ce problème une jambe, en la modélisant simplement par un ressort. La dérivée temporelle d'une grandeur x sera notée $\dot{x} = dx/dt$. Les parties A,B,C et D sont indépendantes, mais il est préférable de les traiter dans l'ordre. L'usage des calculatrices est autorisé.

Rappel : ressorts en série et en parallèle

On considère deux ressorts parfaits sans masse de raideur k_1 et k_2, et de même longeur à vide l_0. On rappelle que l'ensemble composé par ces deux ressorts placés en parallèle se comporte lui-même comme un ressort, de raideur equivalente k_1+k_2. On rappelle aussi que si les ressorts sont placés en série, la raideur du ressort équivalent est

$$\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

1. Quelle analogie existe-t-il avec la loi de composition des résistances en électrocinétique ?

A. un os

Un os est un solide, et comme tout solide, il peut-être considéré comme un ressort lorsque les forces de compression ou de traction qui lui sont appliquées ne sont pas trop grandes. Pour simplifier, supposons que l'os qui nous intéresse est un cylindre de section S et de longeur l_0. Pour un tel solide élastique, la raideur k du ressort qu'il constitue est donnée par la formule suivante :

$$k = \frac{ES}{l_0} \tag{1}$$

où E est une constante appelée module d'Young qui caractérise le matériau et qui vaut 18000 MPa ($1,8\ 10^{10}$ Pascals) pour la matière poreuse dont sont constitués les os.

Pour fixer les idées, nous choisirons un sujet dont le tibia mesure 15 centimètres et le fémur 23 centimètres. Nous supposerons un diamètre de 2 centimètre pour le tibia, et de 4 centimètres pour le fémur.

2. Quel sont les raideurs k_1 et k_2 des ressorts constitués par le tibia et le fémur ?

A titre de comparaison, le module d'Young du cartilage est de 24 MPa (2.4 10^7 Pascals). On suppose (ce qui est bien sur très grossier !) que la jonction entre le tibia et le fémur est réalisée par un petit cylindre de cartilage de section 10 cm^2 et de hauteur 5 mm.

3. Quelle est la raideur d'un tel disque de cartilage ?

Nous considérons l'os comme un ressort sans masse, de raideur k et de longueur à vide l_0, et l'ensemble du corps comme une masse ponctuelle M qui exerce son poids sur l'os. La longueur de l'os est notée l. On suppose que tous les déplacements qui nous interessent s'effectuent dans la direction verticale (Oz) et que toutes les forces considérées sont appliquées dans cette même direction.

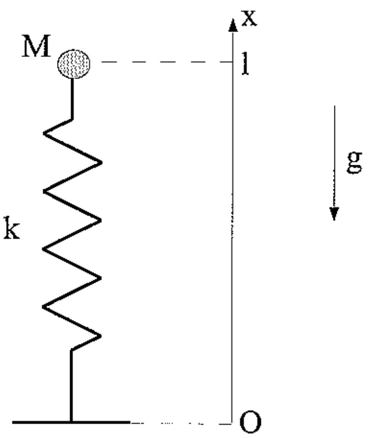


Figure 1: Un os considéré comme un ressort.

4. A partir des notations de la figure 1, écrire l'équation du mouvement pour la masse M en utilisant la variable l.

5. Dans le cas où le sujet est allongé, et aucun poids ne pèse sur l'os, quelle est la longueur de celui-ci ?

6. Dans le cas ou le sujet est debout, et où tout le poids du sujet pèse sur l'os, quelle est la longueur l_1 de celui-ci ?

7. Donner l'ordre de grandeur de la variation de longueur de l'os entre la position debout et la position couchée pour un sujet de 80 kilogrammes.

Les calculs précédents sont valables pour n'importe quel ressort, ils s'appliquent donc aussi en particulier pour le disque de cartilage évoqué plus haut.

8. Donner l'ordre de grandeur de la variation de hauteur du disque de cartilage entre la position debout et la position couchée, pour le sujet de 80 kilogrammes.

9. Comparer entre elles ces variations (os et cartilage) et commenter. On définira la variation de longueur relative $(l_1 - l_0)/l_0$ et on la calculera pour l'os et le disque de cartilage.

Lorsque la personne marche, son poids est alternativement appliqué sur une jambe, puis l'autre. Nous allons considérer que tout se passe exactement comme si la masse M considérée plus haut et qui pèse sur le ressort dépendait du temps. Cela revient à écrire:

$$M(t) = \frac{M_0}{2}\left(1 - \cos(\omega t)\right) \qquad (2)$$

10. Quelle est la période de cette fonction périodique ? En donner un ordre de grandeur pour un être humain.

11. A $t = 0$, la jambe est en l'air et la masse du corps ne s'y appuie pas. A quels instants la masse du corps est-elle totalement appuyée ? Quelle est alors la valeur de M ?

On suppose que l'équation établie à la question 4 reste valable en considérant la masse $M(t)$ dépendant du temps donnée par la formule 2. On cherche une solution périodique de cette équation sous la forme

$$l(t) = a + b\cos(\omega t) \qquad (3)$$

On pose par ailleurs $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M_0}}$; il s'agit de la fréquence propre de l'os.

12. Donner les expressions des constantes a et b en fonction de M, g, k et ω.

13. Donner l'expression de la solution $l(t)$ précédente en fonction de l_0, l_1 et ω.

14. Montrer (application numérique) que la fréquence ω correspondant à la marche d'un être humain (question 10) est très faible devant la fréquence propre de l'os ω_0.

15. En déduire que l'on peut simplifier l'expression de la solution et l'écrire :

$$l(t) = \frac{Mg}{2k}\left(\cos(\omega t) - 1\right) + l_0$$

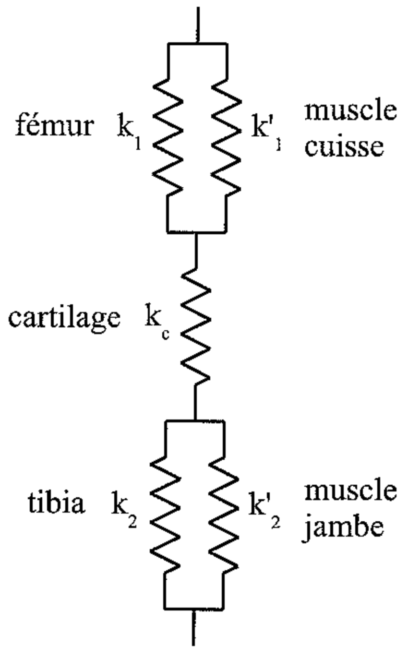


Figure 2: Modèle de l'ensemble jambe et cuisse.

16. Quel est l'allongement moyen de la jambe au cours du mouvement ?

17. Le comparer à l_0 et l_1 et commenter.

B. Tendons et cartilage

Bien évidement, la jambe n'est pas constituée d'un os unique, et il faut considérer la contribution d'un grand ensemble de composants tels que les muscles et tendons. Si l'on note k_1 la raideur du fémur, nous allons décrire l'ensemble des muscles et tendons autour du fémur par un ressort de raideur $k_1' = \mu k_1$. Les muscles étant bien plus souples que l'os, on s'attend à des valeurs de μ très faibles. On note de même k_2 la raideur du tibia et $k_2' = \mu k_2$ la raideur de l'ensemble des muscles enveloppant le tibia. On modélise enfin la jonction du fémur et du tibia, essentiellement constitué de cartilage, comme un ressort de raideur k_c. L'ensemble se présente donc comme schématisé sur la figure 2.

18. Quel est la raideur équivalente k_j de l'ensemble représenté sur la figure 2 ?

19. On choisit $\mu = 10^{-5}$. Montrer que l'on peut négliger la contribution des muscles à la raideur.

20. Le cartilage est bien moins raide que l'os comme on a pu le voir aux questions 2 et 3. Montrer que la raideur k_j de l'ensemble peut-être assimilée à la raideur k_c du cartilage.

L'ensemble de la jambe se comporte donc comme un ressort de raideur $k_j = k_c$. Tous les résultats de la partie A établi en considérant un os comme un ressort sont donc valables en considérant la jambe comme un ressort. Seule la raideur doit être changée dans les formules.

C. Pied

Nous allons maintenant modéliser l'ensemble du pied par un ressort, dont la raideur est notée k_p. Nous supposons que ce ressort est sans masse, et que la masse du pied, notée m_p est localisée au point B. On note y la hauteur du pied. On suppose de plus que le cartilage et l'ensemble des muscles et tendons permettent de dissiper un peu l'énergie mécanique, ce que nous modélisons par une force de frottement fluide classique $F_\alpha = -\alpha\dot{y}$. Enfin, le poids du corps s'applique lui aussi au point B, et nous notons F cette force. Le pied est donc modélisé suivant la figure 3.

21. Ecrire l'équation du mouvement pour la masse m_p située au point B, et montrer que y est solution de l'équation différentielle suivante:

$$m_p\ddot{y} + \alpha\dot{y} + k_p(y - y_0) = F \tag{4}$$

On suppose dans un premier temps que la seule force exercée sur le pied est le poids d'une masse ponctuelle M_0 appliquée en B.

22. Donner l'expression de F dans ce cas, et rechercher une solution stationnaire de l'équation. Donner une interprétation de y_0.

On suppose maintenant que F est nulle, c'est à dire qu'aucune force n'est exercée sur le pied. On cherche une solution $y(t)$ complexe sous la forme:

$$y(t) = y_0 + c\exp(i\omega_p t + \sigma t)$$

où c, ω_p et σ sont des nombres réels, et $i^2 = -1$.

23. Donner les expressions de ω_p et de σ en fonction de m_p, α et k_p.

24. Quelle est l'interprétation physique de σ? Commenter son signe.

On donne $\alpha = 0,7$ u.S.I., $k_p = 4\ 10^4$ N/m et $m_p = 1$ kg.

25. Montrer que α^2/m_p^2 est négligeable devant k_p/m_p et que l'on peut donc simplifier ω_p et l'écrire sous la forme $\omega_p = \sqrt{k_p/m_p}$.

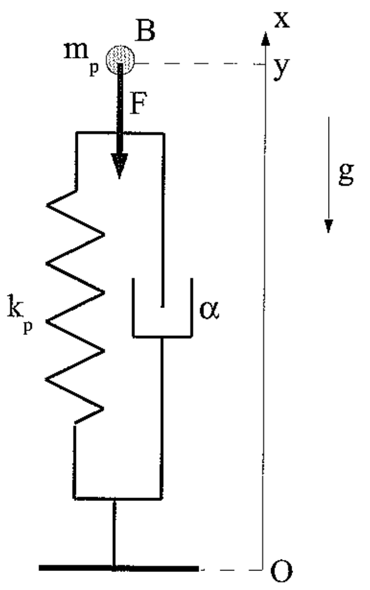


Figure 3: Modèle de pied.

26. Comment définir un temps à partir de σ ? Quelle est l'ordre de grandeur de ce temps ? Commenter.

Nous considérons maintenant que l'individu marche et que l'allongement de l'os est donné par la formule 3. On suppose que la force exercée sur le pied, au point B, est dûe à l'appui de la jambe sur le pied, et qu'elle s'écrit :

$$F(t) = \frac{M_0 g}{2}(\cos(\omega t) - 1) + \frac{l_0}{k_c}$$

où l_0 est la longueur de la jambe considérée dans la partie A, et k_c la raideur de la jambe, qui se trouve être celle du cartilage (questions 3 et 18). M_0 est la masse de l'individu et ω la fréquence de la marche.

27. Faire une figure de l'ensemble composé par la jambe et par le pied.

Pour simplifier, nous négligeons l'amortissement dû au terme visqueux, ce qui permet d'éliminer le deuxième terme de l'équation 4. Nous cherchons alors une solution $y(t)$ de l'équation 4 sous la forme:

$$y(t) = d\cos(\omega t) + e$$

28. Donner les expressions de d et e.

29. Quelle est l'amplitude moyenne du déplacement $(y - y_0)$ sur une période de marche ?

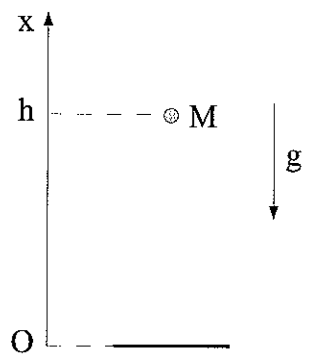
Cette grandeur quantifie la déformation moyenne du pied et peut être comparée à la déformation moyenne de la jambe calculée précédemment, et donnée à la question 15, mais en choisissant comme raideur $k = k_c$ la raideur du cartilage.

30. Montrer que le pied se déforme k_c/k_p fois plus que le cartilage.

31. Quelle est la raideur effective de l'ensemble composé de la jambe et du pied ? Cela est-il compatible avec la loi de composition des raideurs ?

D. Chute

On considère maintenant la chute d'un point matériel de masse M constante. La masse chute depuis une hauteur h qu'elle quitte avec une vitesse nulle.



32. Quelle est l'équation du mouvement d'une masse M qui n'est soumise qu'à son propre poids ?

33. Quelle est, en fonction de h, la vitesse d'impact lors du choc avec le sol ?

34. Quelle est l'accélération a_f lors du choc ?

35. Quelle est l'énergie cinétique de la masse lors du choc ?

Un os ne se comporte comme un ressort que si la pression que l'on exerce est inférieure à un seuil P_s. On considère l'os comme un cylindre parfait de section S. P_s et S sont connues.

36. Donner l'expression de la force critique F_s. Un os de plus grande section est-il plus solide ou plus fragile ?

Un individu de masse M_0 saute depuis une hauteur H pour retomber sur ses pieds. Nous allons utiliser les résultats des questions précédentes et supposer que lors du choc, toute l'énergie cinétique va être transmise au pied que nous avons étudié dans la partie B. On suppose que l'individu est pieds nus, et que toute l'énergie cinétique acquise lors de sa chute est transformée en énergie potentielle élastique de déformation du ressort contitué par le pied.

37. Quel est la variation de longueur du pied lors du choc ?

38. Quelle est la force correspondante ?

Le cartilage se casse si la pression exercée est supérieure à $P_s^{\text{cartilage}}$ et les os se cassent si la pression exercée est supérieure à P_s^{os}

39. Au delà de quelle hauteur de chute H_c le cartilage ou l'os se casseront-ils (donner la formule) ?

40. Commenter le résultat précédent, notamment sur la dépendance de la hauteur de chute par rapport à la masse de l'individu, et à la raideur (os ou cartilage).

41. Pour un fémur, P_s^{os} =100 MPa, et on lui choisira un diamètre de 4 cm. Calculer la hauteur de chute maximale H_c.

L'individu porte des chaussures qui sont elles aussi modélisées par un ressort. La raideur des chaussures est essentiellement dûe aux semelles, et on la note k_s.

42. Faire un schéma du système constitué par la jambe, le pied et la semelle.

43. Quelle est la raideur équivalente de l'ensemble ?

L'individu chute et retombe sur ses pieds.

44. Comment choisir la raideur de la semelle pour protéger au maximum l'individu qui porte les chaussures ? Justifier et commenter.