SESSION 2007

Filière : 2$^{\text{ème}}$ concours

Physique

Epreuve ENS Lyon

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont autorisées.

Pendules de torsion

Certaines questions sont indépendantes. Il n'est pas nécessaire d'avoir répondu à toutes les questions précédentes pour pouvoir poursuivre le problème.

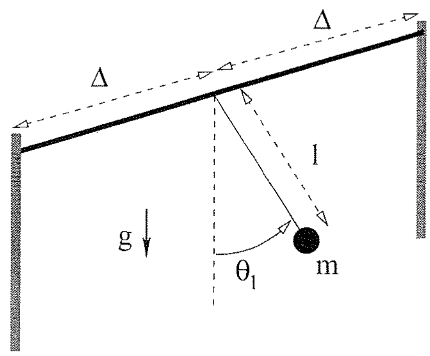
Le barème s'arrête à la question 4.10, c'est-à-dire que les questions 4.11 et 4.12 rapportent des points de bonus.

Dans ce problème les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont notées respectivement sh et ch.

*

1. Pendule de torsion simple

On considère un câble tendu, horizontal de longueur 2Δ, attaché rigidement par ses extrémités à un socle. Un pendule, constitué d'une masse m située à l'extrémité d'une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable, est attaché solidairement au câble à mi-longueur.



Le câble reste parfaitement droit et horizontal. Le pendule oscille dans un plan perpendiculaire au câble et n'agit que sur la torsion du câble.

Le pendule fait un angle θ_1 avec la verticale. Le vecteur g représente l'accélération de pesanteur. Au repos, la torsion du câble est nulle et $\theta_1=0$.
Le segment de câble de longueur Δ est caractérisé par une grandeur k, telle que le module du moment exercé sur le pendule par la partie gauche (ou droite) du câble s'écrit :

$$|\mathcal{M}| = k \ |\theta_1|$$

Pour les applications numériques, on prendra :

$$m = 8 \text{ g}$$
$$\ell = 5 \text{ cm}$$
$$\Delta = 2 \text{ cm}$$
$$g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$$
$$k = 9 \text{ u.s.i.}$$

1.1 Quelle est la signification et la dimension de la grandeur k ?

1.2 Que vaut le moment d'inertie I du pendule ?

1.3 On introduit les notations suivantes :
$\omega_g^2 = g/\ell$ et $\omega_t^2 = k/I$

Montrer que ω_g et ω_t ont la dimension d'une pulsation.
Calculer les valeurs numériques de ces constantes.

1.4 Ecrire l'équation différentielle qui régit le système.

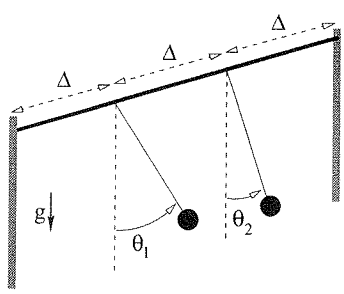
1.5 Exprimer la période des petites oscillations autour de l'état d'équilibre $\theta_1=0$ en fonction de ω_g et ω_t.

1.6 On lâche le pendule écarté de $\theta_1=\pi/6$ sans vitesse initiale. Déterminer la loi du mouvement $\theta_1(t)$. Pour cette question, on fera l'approximation des petits angles.

1.7 Exprimer l'énergie du système E_{tot} en explicitant les termes d'énergie cinétique et les deux termes d'énergie potentielle. Cette énergie est-elle conservée ?

1.8 Tracer l'évolution temporelle de l'amplitude θ_1 et des différents termes d'énergie pour la solution trouvée au 1.6.

2. Pendules de torsion couplés



On considère maintenant deux pendules identiques au pendule simple de la question précédente. Les pendules sont placés à une distance Δ des extrémités et sont séparés d'une même distance Δ. Ils font avec la verticale des angles respectifs θ_1 et θ_2.
Au repos, la torsion du câble est nulle et $\theta_1 = \theta_2 = 0$.
Les notations précédentes restent valables.
Dans cette question on se restreindra aux petites oscillations autour de l'état stable.

2.1 Ecrire le système d'équations différentielles qui régit le système en faisant apparaître ω_g et ω_t.

2.2 En faisant le changement de variables suivant :
$\theta_s = \theta_1 + \theta_2$ et $\theta_d = \theta_1 - \theta_2$,
montrer que tout mouvement des pendules peut se décomposer en deux signaux sinusoïdaux de pulsations ω_s et ω_d que l'on déterminera.

2.3 Décrire les mouvements particuliers obtenus dans les situations suivantes :
• à tout instant, $\theta_s = 0$
• à tout instant, $\theta_d = 0$

Expérimentalement, comment obtient-on ces situations ?

2.4 Montrer que le système d'équations différentielles en θ_1 et θ_2 du 2.a peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = -\omega_t^2 M_2 \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad M_2 = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

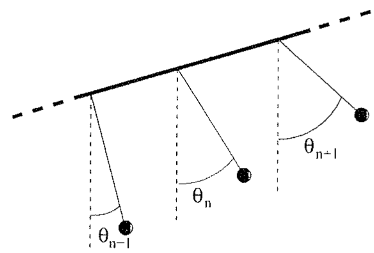
On exprimera α en fonction de $r = \omega_g / \omega_t$.

2.5 Ecrire de même la matrice correspondant au système d'équations en θ_s et θ_d.

2.6 • Déterminer les valeurs propres λ_1 *et* λ_2 de la matrice M_2.
• Calculer les modes propres associés à λ_1 *et* λ_2. Quelle est leur signification physique ?
• Etablir la relation entre les valeurs propres de la matrice M_2 et les pulsations ω_s et ω_d.

3. Chaîne de pendules couplés

On généralise le cas précédent à N pendules régulièrement espacés sur un câble de longueur totale $(N+1)\Delta$ dont les extrémités sont fixées rigidement à un socle. On note θ_n l'angle que fait le $n^{ième}$ pendule avec la verticale.



Attention : Dans la suite du problème (sauf mention contraire explicite à la question 3.2) on **ne se place plus** dans l'approximation des petits angles.

3.1 Exprimer l'équation différentielle qui régit le mouvement du $n^{ième}$ pendule en faisant apparaître les pulsations ω_g et ω_t. On pourra traiter séparément les cas $1<n<N$ d'une part, et les cas $n=1$ et $n=N$ d'autre part.

3.2 • Pour les petites oscillations, montrer que ce système de N équations peut s'écrire sous forme matricielle et expliciter la matrice associée M_N.
• On admet que la matrice M_N possède N valeurs propres distinctes. Quelle relation existe-t-il entre le nombre de pendules N et le nombre de pulsations propres ?
• Donner un autre exemple de système physique dans lequel le nombre de modes propres est égal au nombre de degrés de liberté.

4. Modèle du milieu continu

Dans cette partie, nous allons traiter la chaîne de pendules comme un système continu. Pour cela, on fait tendre Δ vers 0. On définit alors la masse linéique de la chaîne pendulaire $\mu = m/\Delta$, telle que μ reste constante lorsque $\Delta \to 0$.
L'état du système est alors donné par la fonction $\theta = \theta(x,t)$, où x est la position sur le câble et t le temps. On rappelle que l'on **ne se place plus** dans l'approximation des petits angles.

4.1 Dans la suite, on défini la grandeur caractéristique du câble $\gamma = k\,\Delta$. Donner la dimension de γ. Expliquer pourquoi γ est une grandeur caractéristique du câble.

4.2 A partir de l'équation différentielle de la question 3.1 établie pour $1<n<N$, montrer que $\theta(x,t)$ obéit à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} = -\omega_g^2 \sin\{\theta(x,t)\} + c_0^2 \frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}$$

où c_0 est une constante que l'on déterminera.
Calculer sa valeur numérique.

4.3 A quelle(s) condition(s) cette équation différentielle est-elle linéaire ?

4.4 Exprimer l'énergie totale d'un petit élément δx de la chaîne. En déduire l'énergie totale du système sous forme intégrale.

4.5 On cherche une solution correspondant à une onde progressive, c'est-à-dire de la forme : $\theta(x,t)=f(u)$, où $u = (x - v\,t)/L$.
• Que vaut v si l'on néglige la gravité ?
• Expliquer pourquoi on ne peut plus calculer v quand le terme de gravité n'est plus négligé ?

4.6 Une solution particulière, nommée soliton, existe :

$$\theta_s(x,t) = 4\arctan\left\{\exp\left(\frac{x - v_s\,t}{L}\right)\right\}$$

Montrer que $\theta_s(x,t)$ est solution de l'équation différentielle du (4.2) pour une valeur définie de v_s. Exprimer cette valeur en fonction de c_0 et ω_g.

On donne :

$$\forall u, \quad \sin\left(4\arctan(e^u)\right) = -2\,\frac{\text{sh}u}{\text{ch}^2 u}$$

4.7 • Faire une représentation graphique de la solution soliton à un instant fixé.
• Faire un schéma représentant la chaîne de pendules à un instant fixé.
• Quel est le sens physique de la longueur L ?

4.8 • Expliquer pourquoi la solution θ_s est « chirale », c'est-à-dire qu'elle brise la symétrie gauche-droite.
• La solution soliton est-elle gauche ou droite (justifier) ?
• Exprimer alors la solution anti-soliton θ_a.

4.9 Montrer que les grandeurs L et v_s sont majorées par des constantes à déterminer.
Comment la valeur de L varie-t-elle avec v_s ? Commenter.

4.10 Montrer que l'énergie E_s de la solution soliton vaut :

$$E_s = 8\,\gamma/L$$

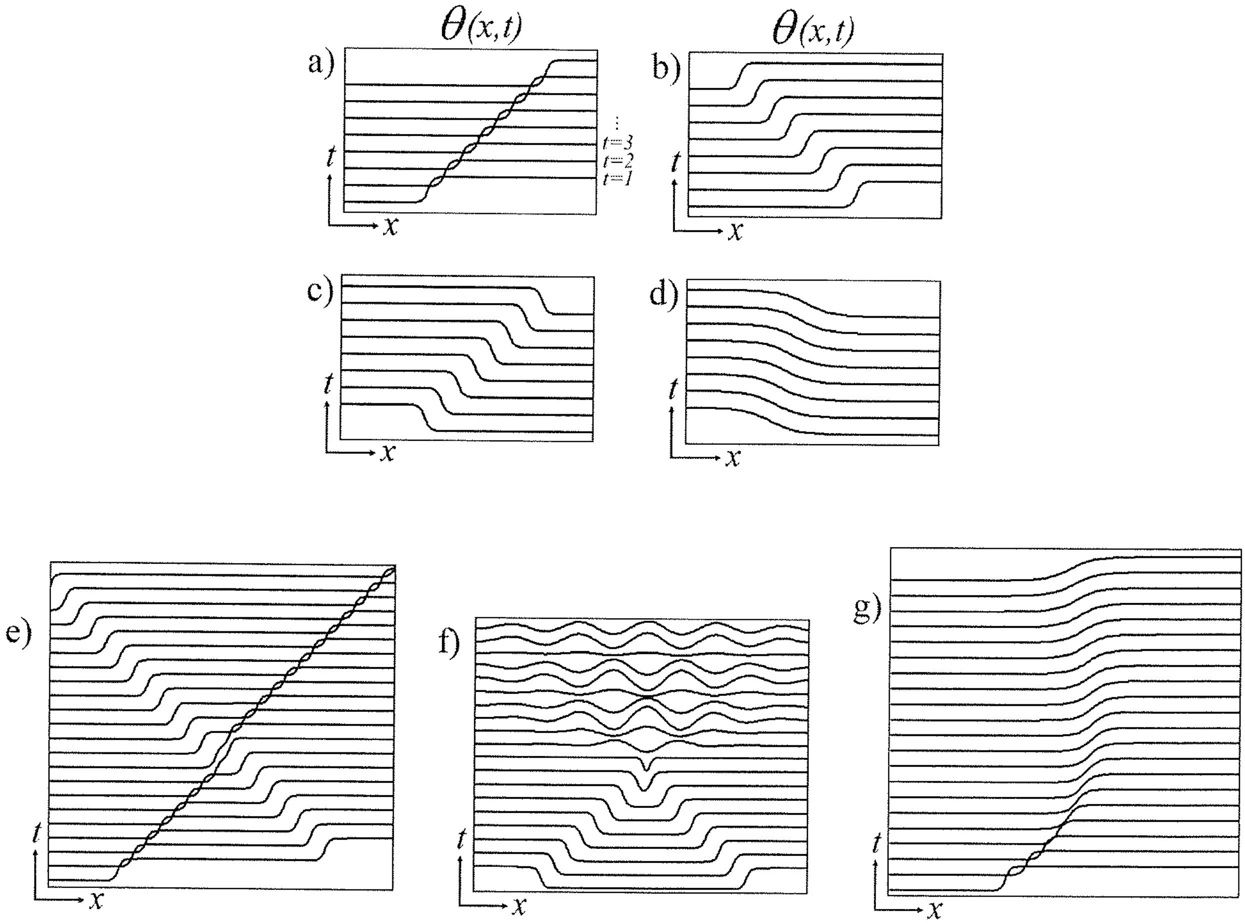
On pourra utiliser le fait que :

$$1 - \cos\theta_s(u) = \frac{2}{\text{ch}^2 u}$$

Tournez la page S.V.P

4.11 Une façon pratique de représenter une fonction $\theta(x,t)$ consiste à tracer θ en fonction de x pour différentes valeurs de t. Pour que le graphe soit lisible, on peut décaler les différentes courbes vers le haut au fur et à mesure que t augmente. On obtient ainsi un diagramme spatio-temporel de la fonction $\theta(x,t)$.

Les figures ci-dessous représentent de tels diagrammes correspondant à diverses solutions. Interprétez les différents diagrammes.



4.12 Le suffixe « on » de soliton (le même que dans électron ou phonon) provient de l'analogie que l'on peut faire avec une particule.
• Expliquer pourquoi cette analogie est pertinente.
• Pour les solitons il existe également une dualité onde-particule. Justifier (on pourra s'aider des diagrammes de la question précédente).
• Les solitons doivent-ils être considérés comme des bosons (spin entier, comme le photon) ou des fermions (spin demi-entier, comme l'électron) ? Justifier.

*

fin